Lista 06 – Matemática
Geometria Espacial

1. (Fuvest 2015) A grafite de um lápis tem quinze centímetros de comprimento e dois milímetros de espessura. Dentre os valores abaixo, o que mais se aproxima do número de átomos presentes nessa grafite é

Nota:
1) Assuma que a grafite é um cilindro circular reto, feito de grafita pura. A espessura da grafite é o diâmetro da base do cilindro.
2) Adote os valores aproximados de:

$2,2\,g/cm^3$ para a densidade da grafita;

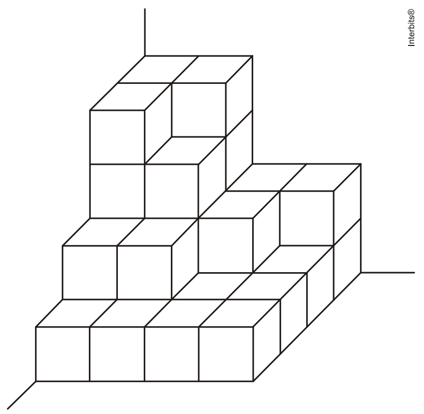
$12\,g/mol$ para a massa molar do carbono;

$6,0\times10^{23}mol^{-1}$ para a constante de Avogadro

a) 5×10^{23} b) 1×10^{23} c) 5×10^{22}
d) 1×10^{22} e) 5×10^{21}

2. (Pucrj 2015) O que acontece com o volume de um paralelepípedo quando aumentamos a largura e a altura em 10% e diminuímos a profundidade em 20%?
a) Não se altera
b) Aumenta aproximadamente 3%
c) Diminui aproximadamente 3%
d) Aumenta aproximadamente 8%
e) Diminui aproximadamente 8%

3. (Pucrj 2015) O diagrama abaixo mostra uma pilha de caixas cúbicas iguais, encostadas no canto de um depósito.



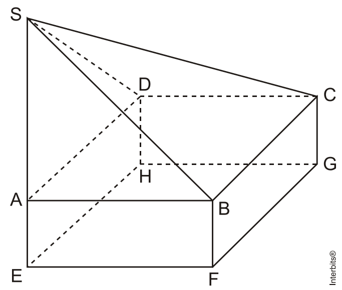
Se a aresta de cada caixa é de 30 cm, então o volume total dessa pilha, em metros cúbicos, é de:

a) $0,513$ b) $0,729$ c) $0,810$ d) $0,837$ e) $0,864$

4. (Pucpr 2015) Um recipiente tem a forma de um paralelepípedo retângulo reto, de base quadrada, com as seguintes medidas: $1m\times1m\times2\,m$ (internas). Esse recipiente contém um produto na forma líquida e está ocupado em 60% de sua capacidade. Outro produto será adicionado a esse recipiente, também na forma líquida, acondicionado em cilindros (cilindro reto) com 20 cm de diâmetro na base e $x\text{ cm}$ de altura (medidas internas do cilindro). Se forem adicionadas 40 unidades do novo produto e o volume desta mistura dentro do paralelepípedo atingir a altura de $1,828\,m$ da base, então, a altura do cilindro (x) será:
Use $\pi = 3,14.$

a) $1m.$ b) $0,5\,m.$ c) $0,6\,m.$ d) $0,314\,m.$ e) $0,628\,m.$

5. (Fuvest 2015) O sólido da figura é formado pela pirâmide $SABCD$ sobre o paralelepípedo reto $ABCDEFGH.$ Sabe-se que S pertence à reta determinada por A e E e que $\overline{AE} = 2cm,$ $\overline{AD} = 4cm$ e $\overline{AB} = 5cm.$



A medida do segmento SA que faz com que o volume do sólido seja igual a $\frac{4}{3}$ do volume da pirâmide $SEFGH$ é

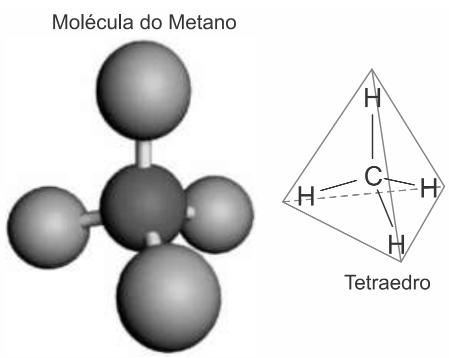
a) 2 cm b) 4 cm c) 6 cm d) 8 cm e) 10 cm

6. (Ufsm 2015) Desde a descoberta do primeiro plástico sintético da história, esse material vem sendo aperfeiçoado e aplicado na indústria. Isso se deve ao fato de o plástico ser leve, ter alta resistência e flexibilidade. Uma peça plástica usada na fabricação de um brinquedo tem a forma de uma pirâmide regular quadrangular em que o apótema mede $10mm$ e a aresta da base mede $12mm.$ A peça possui para encaixe, em seu interior, uma parte oca de volume igual a $78mm^3.$

O volume, em $mm^3,$ dessa peça é igual a

a) $1152.$ b) $1074.$ c) $402.$ d) $384.$ e) $306.$

7. (Uel 2015) Na molécula do Metano $(CH_4),$ o átomo de carbono ocupa o centro de um tetraedro regular em cujos vértices estão os átomos de hidrogênio.



Considerando que as arestas ℓ do tetraedro regular medem 6 cm e que a altura mede $h=\frac{1}{3}\ell\sqrt{6}$, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o volume desse tetraedro.

a) $3\sqrt{3}\text{ cm}^3$ b) $18\sqrt{2}\text{ cm}^3$ c) $18\sqrt{3}\text{ cm}^3$
d) $36\sqrt{2}\text{ cm}^3$ e) $54\sqrt{2}\text{ cm}^3$

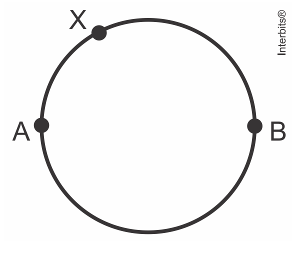
8. (Udesc 2015) Em uma escola foi proposta uma gincana. De acordo com as regras da gincana, o vencedor de uma das provas seria aquele que chegasse mais próximo do número de sólidos existentes dentro de um pote. Neste pote, com formato de prisma triangular regular, medindo 50cm de altura e lado do triângulo da base com 40cm, foi colocada a mesma quantidade de cubos, pirâmides regulares de base triangular e pirâmides regulares de base quadrangular. Informou-se aos participantes que a altura das pirâmides triangulares é de 3cm e que a altura das pirâmides quadrangulares é igual à altura dos cubos. Sabe-se, também, que as arestas dos cubos medem $2\sqrt{3}\text{cm}$; as arestas da base das pirâmides triangulares medem 4cm e as arestas da base das pirâmides quadrangulares equivalem à metade das arestas dos cubos. Com base nessas informações, João, um dos participantes da gincana, considerou que uma boa estimativa seria fazer os cálculos como se os sólidos preenchessem o máximo possível do pote, deixando a menor quantidade possível de espaços. Nesse caso, João respondeu que o número de sólidos dentro do pote é de:

a) 2001 b) 1248 c) 1998 d) 1251 e) 2015

9. (Uece 2015) A medida da aresta de um tetraedro regular com altura igual a 5 metros é

a) $5\sqrt{2{,}5}\text{m}$. b) $5\sqrt{1{,}5}\text{m}$. c) $2\sqrt{1{,}5}\text{m}$. d) $3\sqrt{2{,}5}\text{m}$.

10. (Upe 2015) A figura a seguir representa a vista de cima de uma cisterna cilíndrica. Os pontos A e B indicam os locais de abastecimento, diametralmente opostos, e o ponto X mostra a posição de uma pessoa que se encontra a 6m de A e a 8m de B.



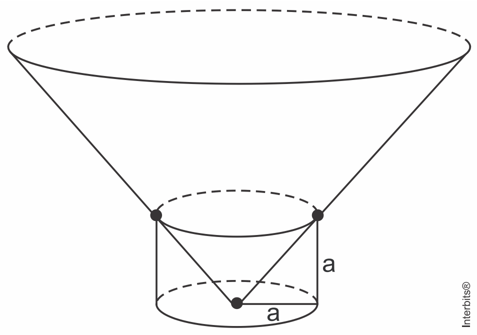
Sabendo-se que a profundidade da cisterna é de 2 m, qual a sua capacidade máxima?
(Considere $\pi \cong 3$)

a) 14.000 litros. b) 48.000 litros. c) 100.000 litros.
d) 150.000 litros. e) 300.000 litros.

11. (Pucrj 2015) O volume do sólido gerado pela rotação de um quadrado de lado 3 cm em torno de um dos seus lados é, em cm^3:

a) 3π b) 6π c) 9π d) 18π e) 27π

12. (Pucrs 2015) Uma casquinha de sorvete na forma de cone foi colocada em um suporte com formato de um cilindro, cujo raio da base e a altura medem $a\text{ cm}$, conforme a figura.



O volume da parte da casquinha que está no interior do cilindro, em cm^3, é

a) $\frac{\pi a^2}{2}$ b) $\frac{\pi a^2}{3}$ c) $\frac{\pi a^3}{2}$ d) $\frac{\pi a^3}{3}$ e) $\frac{\pi a^3}{6}$

13. (Uemg 2015) Um reservatório de água, de formato cônico, com raio da tampa circular igual a 8 metros e altura igual a 9 metros, será substituído por outro de forma cúbica, de aresta igual a 10 metros.

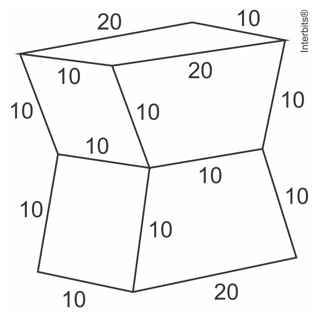
Estando o reservatório cônico completamente cheio, ao se transferir a água para o reservatório cúbico, a altura do nível atingida pela água será de (considere $\pi \cong 3$)

a) $5{,}76\text{m}$. b) $4{,}43\text{m}$. c) $6{,}38\text{m}$. d) $8{,}74\text{m}$.

14. (Unicamp 2015) Um cilindro circular reto, com raio da base e altura iguais a R, tem a mesma área de superfície total que uma esfera de raio

a) $2R$. b) $\sqrt{3}R$. c) $\sqrt{2}R$. d) R.

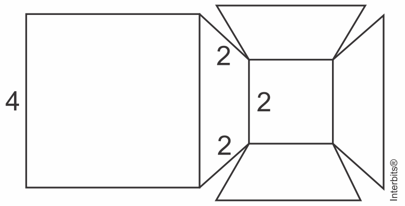
15. (Ufrgs 2015) O primeiro prêmio de um torneio recebe um troféu sólido confeccionado em metal, com as medidas abaixo.



Considerando que as bases do troféu são congruentes e paralelas, o volume de metal utilizado na sua confecção é

a) $100\sqrt{3}$. b) $150\sqrt{3}$. c) $1.000\sqrt{3}$. d) $1.500\sqrt{3}$. e) $3.000\sqrt{3}$.

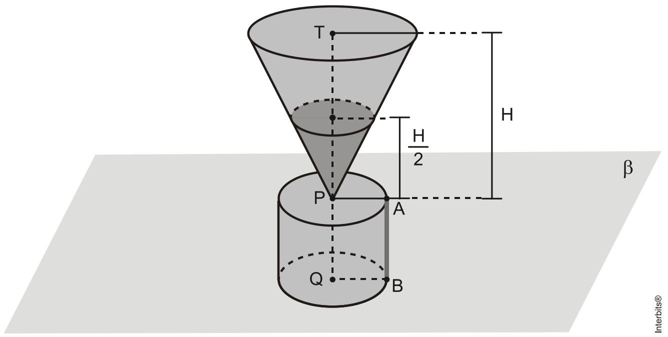
16. (Ufrgs 2015) Considere a planificação do sólido formado por duas faces quadradas e por quatro trapézios congruentes, conforme medidas indicadas na figura representada abaixo.



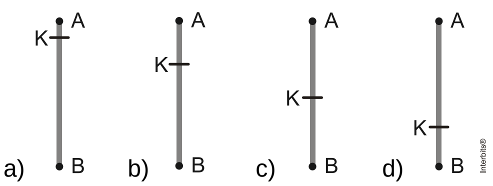
O volume desse sólido é

a) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$. b) $\frac{28\sqrt{2}}{3}$. c) $8\sqrt{2}$. d) $16\sqrt{2}$. e) $20\sqrt{2}$.

17. (Uerj 2015) Um funil, com a forma de cone circular reto, é utilizado na passagem de óleo para um recipiente com a forma de cilindro circular reto. O funil e o recipiente possuem a mesma capacidade.
De acordo com o esquema, os eixos dos recipientes estão contidos no segmento TQ, perpendicular ao plano horizontal β.



Admita que o funil esteja completamente cheio do óleo a ser escoado para o recipiente cilíndrico vazio. Durante o escoamento, quando o nível do óleo estiver exatamente na metade da altura do funil , $\frac{H}{2}$, o nível do óleo no recipiente cilíndrico corresponderá ao ponto K na geratriz AB.
A posição de K, nessa geratriz, é melhor representada por:



18. (Espcex (Aman) 2015) Um cone de revolução tem altura 4 cm e está circunscrito a uma esfera de raio 1cm. O volume desse cone (em cm^3) é igual a

a) $\frac{1}{3}\pi$. b) $\frac{2}{3}\pi$. c) $\frac{4}{3}\pi$. d) $\frac{8}{3}\pi$. e) 3π.

Gabarito:

Resposta da questão 1:
[C]

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Química]
Cálculo do volume da grafita:

$$\text{diâmetro} = 2 \text{ mm de espessura} = 2\times10^{-3}\ \text{m} = 2\times10^{-1}\ \text{cm}$$
$$\text{raio} = 1 \text{ mm de espessura} = 10^{-1}\ \text{m}$$
$$\text{altura} = 15\ \text{cm}$$
$$V_{\text{cilindro}} = (\text{Área da base})\times(\text{altura})$$
$$V_{\text{cilindro}} = \pi\times r^2\times h$$
$$V_{\text{cilindro}} = \pi\times(10^{-1})^2\times 15$$
$$V_{\text{cilindro}} = 0{,}471\ \text{cm}^3$$
$$d_{\text{grafita}} = 2{,}2\ \text{g}/\text{cm}^3$$
$$1\ \text{cm}^3 \text{ ——— } 2{,}2\ \text{g}$$
$$0{,}471\ \text{cm}^3 \text{ ——— } m_{\text{grafita}}$$
$$m_{\text{grafita}} = 1{,}0362\ \text{g}$$
$$12 \text{ g de grafita ——— } 6{,}0\times10^{23} \text{ átomos de carbono}$$
$$1{,}0362 \text{ g de grafita ——— } x$$
$$x = 5{,}18\times10^{22} \text{ átomos de carbono}$$

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Matemática]
Tem-se que o volume de grafite é dado por

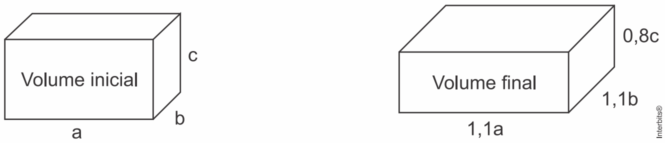
$$\pi\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot h \cong 3{,}14\cdot\left(\frac{0{,}2}{2}\right)^2\cdot 15$$
$$\cong 0{,}47\ \text{cm}^3.$$

Daí, sabendo que a densidade da grafita é $2{,}2\ \text{g}/\text{cm}^3$, vem que a massa de grafite é igual a
$m = 2{,}2\cdot 0{,}47 \cong 1{,}03$ g.

Portanto, sendo n o número de átomos de carbono presentes nessa grafite, temos

$$n\cdot\frac{12}{6\cdot10^{23}} = 1{,}03 \Rightarrow n \cong 5\cdot10^{22}.$$

Resposta da questão 2:
[C]



$$V_{(\text{inicial})} = a\cdot b\cdot c$$
$$V_{(\text{final})} = 1{,}1\cdot a\cdot 1{,}1\cdot b\cdot 0{,}8\cdot c = 0{,}968\cdot V_{(\text{inicial})}$$

$V_{(\text{final})} - V_{(\text{inicial})} = -0{,}032V_{(\text{inicial})}$, portanto houve uma redução de aproximadamente 3%.

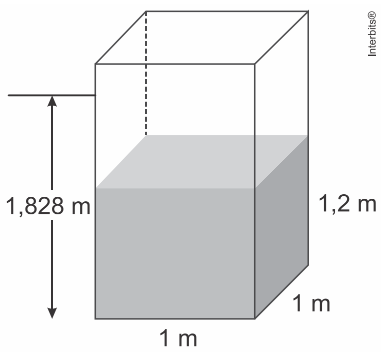
Resposta da questão 3:
[E]

Volume de cada cubo em $m^3 = V = (0{,}3)^3 = 0{,}027\text{m}^3$

Total de cubos na figura: $4\cdot4+9+4+3 = 32$

Volume Total: $32\cdot0{,}027 = 0{,}864\text{m}^3$

Resposta da questão 4:
[B]



Altura do Líquido no recipiente: 60% de 2 = 1,2m
Volume dos cilindros: $40\cdot\pi(0{,}1)^2\cdot x = 1\cdot1\cdot(1{,}828-1{,}2)$
Daí, temos a seguinte equação:
$1{,}256x = 0{,}628 \Rightarrow x = 0{,}5\text{m}.$

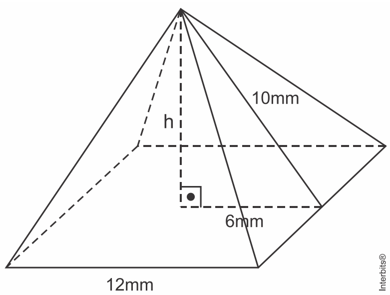
Portanto, a altura do cilindro é $x = 0{,}5\text{m}.$

Resposta da questão 5:
[E]

Sabendo que $ABCDEFGH$ é paralelepípedo reto, temos $\overline{EF} = \overline{AB}$ e $\overline{EH} = \overline{AD}$. Portanto, segue que o resultado pedido é dado por

$$[SABCD]+[ABCDHEFG] = \frac{4}{3}\cdot[SEFGH] \Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot\overline{SA}+\overline{AE} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}(\overline{AE}+\overline{SA})$$
$$\Leftrightarrow 3\cdot\overline{SA}+9\cdot2 = 4\cdot(2+\overline{SA})$$
$$\Leftrightarrow \overline{SA} = 10\text{cm}.$$

Resposta da questão 6:
[E]



Cálculo da altura da Pirâmide:
$h^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow h = 8\text{mm}$

Volume da peça como diferença do volume da pirâmide e o volume da parte oca.

$V_{\text{peça}} = V_{\text{pirâmide}} - 78$

$V_{\text{peça}} = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 8 - 78$

$V_{\text{peça}} = 306\text{mm}^3$

Resposta da questão 7:
[B]

O volume do tetraedro regular de aresta $\ell = 6\text{cm}$ é dado por

$$\frac{\ell^3\sqrt{2}}{12} = \frac{6^3\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2}\,\text{cm}^3.$$

Resposta da questão 8:
[C]

Seja n a quantidade de sólidos de cada tipo que será colocada no interior do pote.

O volume do pote é $\frac{40^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 50 = 20000\sqrt{3}\,\text{cm}^3.$

O volume de cada cubo é igual a $(2\sqrt{3})^3 = 24\sqrt{3}\,\text{cm}^3.$

O volume de cada pirâmide triangular regular é
$\frac{1}{3} \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 3 = 4\sqrt{3}\,\text{cm}^3.$

O volume de cada pirâmide quadrangular regular é
$\frac{1}{3} \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}^3.$

Portanto, tem-se que

$$n \cdot (24\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 20000\sqrt{3} \Leftrightarrow 30\sqrt{3} \cdot n = 20000\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow n \cong 666,67.$$

Como a quantidade de espaços deve ser a menor possível, temos $n = 666$ e, por conseguinte, o resultado pedido é $666 \cdot 3 = 1998.$

Resposta da questão 9:
[B]

Sabendo que a altura de um tetraedro regular de aresta ℓ é dada por $h = \frac{\ell\sqrt{6}}{3},$ temos

$$5 = \frac{\ell\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \ell = \frac{15}{\sqrt{6}}$$
$$\Leftrightarrow \ell = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \ell = 5\sqrt{\frac{6}{4}}$$
$$\Leftrightarrow \ell = 5\sqrt{1,5}\text{ m}.$$

Resposta da questão 10:
[D]

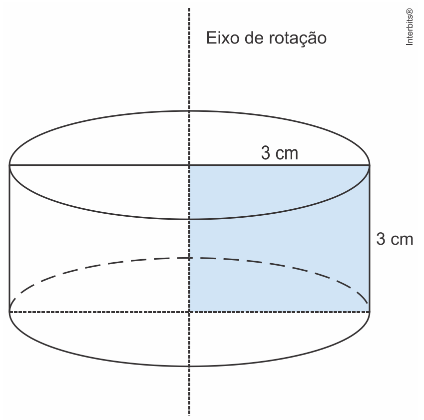
Como AB é um diâmetro, tem-se que o triângulo ABX é retângulo. Além disso, sendo $\overline{AX} = 6\text{ m}$ e $\overline{BX} = 8\text{ m},$ podemos concluir que o triângulo ABX é semelhante ao triângulo de lados $3\text{ m}, 4\text{ m}$ e $5\text{ m}.$

Portanto, segue que $\overline{AB} = 10\text{ m}$ e $r = 5\text{ m},$ com r sendo o raio da cisterna.

A capacidade máxima da cisterna é dada por

$$\pi \cdot 5^2 \cdot 2 \cong 3 \cdot 25 \cdot 2 = 150\text{ m}^3 = 150.000\text{ litros}.$$

Resposta da questão 11:
[E]



O volume V do cilindro resultante será dado por:
$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 27\pi\text{ cm}^3$

Resposta da questão 12:
[D]

O volume pedido corresponde ao volume de um cone cujo raio da base mede $a\,\text{cm}$ e cuja altura é $a\,\text{cm}.$ Portanto, o resultado é

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{3}\text{cm}^3.$$

Resposta da questão 13:
[A]

O volume de água no reservatório cônico é igual a

$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 8^2\cdot 9\cong 576\ m^3.$

Portanto, a altura h atingida no reservatório cúbico será

$10^2\cdot h = 576 \Leftrightarrow h = 5{,}76\ m.$

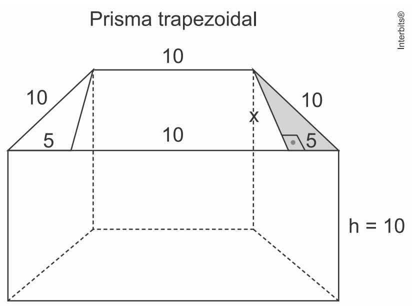
Resposta da questão 14:
[D]

Seja r o raio da esfera. Tem-se que

$4\pi\cdot r^2 = 2\pi\cdot R\cdot (R+R) \Leftrightarrow r = R.$

Resposta da questão 15:
[D]

O troféu é composto por dois prismas retos de bases trapezoidais.

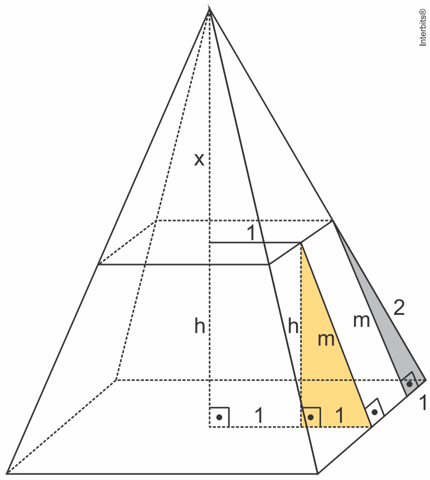


Cálculo da altura x da base do prisma:
$x^2 + 5^2 = 10^2 \Rightarrow x = 5\sqrt{3}$

Volume do prisma: $V = 2\cdot\frac{(10+20)\cdot 5\sqrt{3}}{2}\cdot 10 = 1500\sqrt{3}$

Resposta da questão 16:
[B]

O sólido descrito é um tronco de Pirâmide.



Calculando a medida m, temos:
$m^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow m = \sqrt{3}$

Calculando, agora, a medida h.

$h^2 + 1^2 = \sqrt{3}^2 \Rightarrow h = \sqrt{2}$

Por semelhança encontramos o valor de x:
$\frac{x}{x+\sqrt{2}} = \frac{2}{4} \Rightarrow x = \sqrt{2}$

O volume do sólido será a diferença entre o volume da pirâmide maior e o volume da pirâmide menor.
$V = \frac{1}{3}\cdot 4^2\cdot 2\sqrt{2} - \frac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{2} = \frac{28\sqrt{2}}{3}$

Resposta da questão 17:
[A]

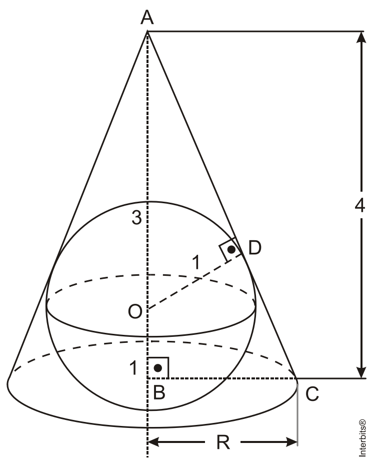
Volume do cilindro: V
Volume do óleo no cone no momento considerado: V_i
Daí, temos:

$$\frac{V_i}{V} = \left(\frac{\frac{H}{2}}{H}\right)^3 \Rightarrow V_i = \frac{V}{8}$$

Portanto, o volume que estará no cilindro no instante considerado será: $V - \frac{V}{8} = \frac{7V}{8}$, ou seja, 87,5% do volume do cilindro, portanto a alternativa [A] é mais adequada.

Resposta da questão 18:
[D]

Considerando O o centro da esfera, temos:



No triângulo AOD, temos: $AD^2 + 1^2 = 3^2 \Rightarrow AD = \sqrt{8}cm$
$\Delta ADO \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{4}{\sqrt{8}}cm$

Portanto, o volume V do cone será dado por:
$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{8}}\right)^2\cdot 4 = \frac{8\cdot\pi}{3}cm^3$