Lista 05 – Matemática

1. A grafite de um lápis tem quinze centímetros de comprimento e dois milímetros de espessura. Dentre os valores abaixo, o que mais se aproxima do número de átomos presentes nessa grafite é

Nota:
1) Assuma que a grafite é um cilindro circular reto, feito de grafita pura. A espessura da grafite é o diâmetro da base do cilindro.
2) Adote os valores aproximados de:
   1. $2{,}2\,g/cm^3$ para a densidade da grafita;
   2. $12\,g/mol$ para a massa molar do carbono;
   3. $6{,}0\times10^{23}\,mol^{-1}$ para a constante de Avogadro

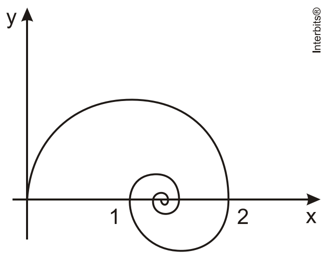
a) 5×10^{23} b) 1×10^{23} c) 5×10^{22} d) 1×10^{22} e) 5×10^{21}

2. Dadas as sequências $a_n = n^2+4n+4$, $b_n = 2^{n^2}$, $c_n = a_{n+1} - a_n$ e $d_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, definidas para valores inteiros positivos de n, considere as seguintes afirmações:

I. a_n é uma progressão geométrica;
II. b_n é uma progressão geométrica;
III. c_n é uma progressão aritmética;
IV. d_n é uma progressão geométrica.

São verdadeiras apenas
a) I, II e III. b) I, II e IV. c) I e III. d) II e IV. e) III e IV.

3. Na figura abaixo temos uma espiral formada pela união de infinitos semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo (o maior) é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do semicírculo anterior, o comprimento da espiral é igual a



desenho ilustrativo-fora de escala

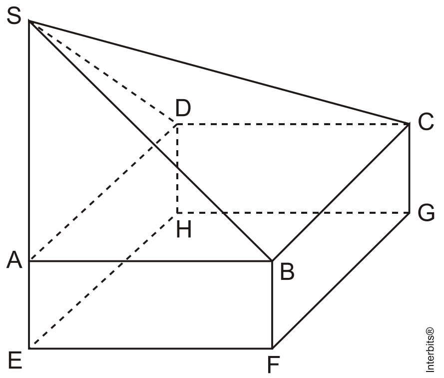
a) π. b) 2π. c) 3π. d) 4π. e) 5π.

4. No sistema linear $\begin{cases} ax - y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = m \end{cases}$, nas variáveis x, y e z, a e m são constantes reais. É correto afirmar:
a) No caso em que $a = 1$, o sistema tem solução se, e somente se, $m = 2$.
b) O sistema tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.
c) No caso em que $m = 2$, o sistema tem solução se, e somente se, $a = 1$.
d) O sistema só tem solução se $a = m = 1$.
e) O sistema não tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

5. De uma caixa contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50 retiram-se duas bolas, sem reposição. A probabilidade do número da primeira bola ser divisível por 4 e o número da segunda bola ser divisível por 5 é

a) $\dfrac{12}{245}$. b) $\dfrac{14}{245}$. c) $\dfrac{59}{2450}$. d) $\dfrac{59}{1225}$. e) $\dfrac{11}{545}$.

6. O sólido da figura é formado pela pirâmide $SABCD$ sobre o paralelepípedo reto $ABCDEFGH$. Sabe-se que S pertence à reta determinada por A e E e que $\overline{AE} = 2cm$, $\overline{AD} = 4cm$ e $\overline{AB} = 5cm$.



A medida do segmento SA que faz com que o volume do sólido seja igual a $\dfrac{4}{3}$ do volume da pirâmide $SEFGH$ é
a) 2 cm b) 4 cm c) 6 cm d) 8 cm e) 10 cm

7. Um cone de revolução tem altura 4 cm e está circunscrito a uma esfera de raio $1\,\text{cm}$. O volume desse cone (em cm^3) é igual a

a) $\dfrac{1}{3}\pi$. b) $\dfrac{2}{3}\pi$. c) $\dfrac{4}{3}\pi$. d) $\dfrac{8}{3}\pi$. e) 3π.

8. No plano cartesiano, a equação $|x-y| = |x+y|$ representa
a) um ponto.
b) uma reta.
c) um par de retas paralelas.
d) um par de retas concorrentes.

9. A equação $x^2+2x+y^2+my = n$, em que m e n são constantes, representa uma circunferência no plano cartesiano. Sabe-se que a reta $y = -x+1$ contém o centro da circunferência e a intersecta no ponto $(-3, 4)$. Os valores de m e n são, respectivamente,

a) -4 e 3 b) 4 e 5 c) -4 e 2 d) -2 e 4 e) 2 e 3

10. O ponto simétrico do ponto $(1,5)$ em relação à reta de equação $2x + 3y - 4 = 0$ é o ponto

a) $(-3,-1)$. b) $(-1,-2)$. c) $(-4,4)$. d) $(3,8)$. e) $(3,2)$.

11. Considere as afirmações a seguir:

I. O lugar geométrico do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, com comprimento l fixado, cujos extremos se deslocam livremente sobre os eixos coordenados é uma circunferência.
II. O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que $6x^3 + x^2y - xy^2 - 4x^2 - 2xy = 0$ é um conjunto finito no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.
III. Os pontos $(2,3)$, $(4,-1)$ e $(3,1)$ pertencem a uma circunferência.

Destas, é (são) verdadeira(s)
a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III. d) I e II. e) I e III.

12. A tabela abaixo informa alguns valores nutricionais para a mesma quantidade de dois alimentos, A e B.

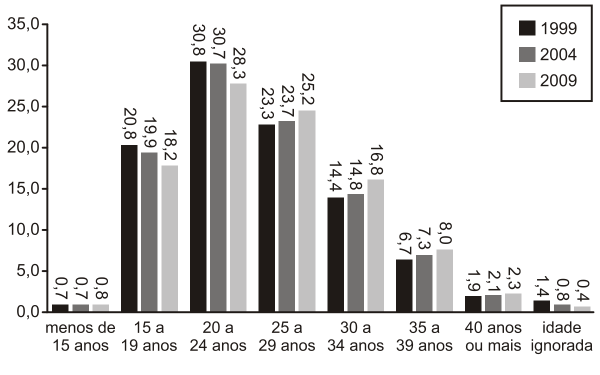
Alimento	**A**	**B**
Quantidade	20 g	20 g
Valor Energético	60 kcal	80 kcal
Sódio	10 mg	20 mg
Proteína	6 g	1 g

Considere duas porções isocalóricas (de mesmo valor energético) dos alimentos A e B. A razão entre a quantidade de proteína em A e a quantidade de proteína em B é igual a

a) 4. b) 6. c) 8. d) 10.

13. Examine o gráfico.

PORCENTAGEM DE REGISTROS DE NASCIMENTOS DO ANO, POR GRUPOS DE IDADES DA MÃE
BRASIL - 1999 / 2004 / 2009



IBGE. Diretoria de Pesquisa, Coordenação de População e Indicadores Sociais, Estatísticas do Registro Civil, 1999/2004/2009. Adaptado.

Com base nos dados do gráfico, pode-se afirmar corretamente que a idade
a) mediana das mães das crianças nascidas em 2009 foi maior que 27 anos.
b) mediana das mães das crianças nascidas em 2009 foi menor que 23 anos.
c) mediana das mães das crianças nascidas em 1999 foi maior que 25 anos.
d) média das mães das crianças nascidas em 2004 foi maior que 22 anos.
e) média das mães das crianças nascidas em 1999 foi menor que 21 anos.

14. Na cidade de São Paulo, as tarifas de transporte urbano podem ser pagas usando o bilhete único. A tarifa é de R\$ 3,00 para uma viagem simples (ônibus ou metrô/trem) e de R\$ 4,65 para uma viagem de integração (ônibus e metrô/trem). Um usuário vai recarregar seu bilhete único, que está com um saldo de R\$ 12,50. O menor valor de recarga para o qual seria possível zerar o saldo do bilhete após algumas utilizações é
a) R\$ 0,85 b) R\$ 1,15 c) R\$ 1,45 d) R\$ 2,50 e) R\$ 2,80

15. Prazeres, benefícios, malefícios, lucros cercam o mundo dos refrigerantes. Recentemente, um grande fabricante nacional anunciou que havia reduzido em 13 mil toneladas o uso de açúcar na fabricação de seus refrigerantes, mas não informou em quanto tempo isso ocorreu. O rótulo atual de um de seus refrigerantes informa que 200 ml do produto contêm 21 g de açúcar. Utilizando apenas o açúcar “economizado” pelo referido fabricante seria possível fabricar, aproximadamente,
a) 124 milhões de litros de refrigerante.
b) 2,60 bilhões de litros de refrigerante.
c) 1.365 milhões de litros de refrigerante.
d) 273 milhões de litros de refrigerante.

16. Uma pirâmide de altura $h = 1\,cm$ e volume $V = 50\,cm^3$ tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se $n-3$ diagonais que o decompõem em $n-2$ triângulos cujas áreas S_i, $i = 1, 2, ..., n-2$, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \frac{3}{2}cm^2$ e $S_6 = 3\,cm^2$. Então n é igual a

a) 22. b) 24. c) 26. d) 28. e) 32.

17. O perímetro de um triângulo retângulo é igual a 6,0 m e as medidas dos lados estão em progressão aritmética (PA). A área desse triângulo é igual a

a) 3,0 m^2. b) 2,0 m^2. c) 1,5 m^2. d) 3,5 m^2.

18. Considere os polinômios em $x \in \mathbb{R}$ da forma $p(x) = x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$. As raízes de $p(x) = 0$ constituem uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ quando (a_1, a_2, a_3) é igual a

a) $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{5}{4}\right)$. b) $\left(\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}\right)$. c) $\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4}\right)$.
d) $\left(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$. e) $\left(\frac{1}{4}, -1, -\frac{1}{4}\right)$.

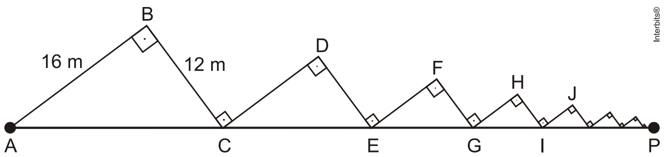
19. Os números naturais ímpares são dispostos como mostra o quadro

1ª linha	1					
2ª linha	3	5				
3ª linha	7	9	11			
4ª linha	13	15	17	19		
5ª linha	21	23	25	27	29	
...	...	...	...	...	...	...

O primeiro elemento da 43ª linha, na horizontal, é:

a) 807 b) 1007 c) 1307 d) 1507 e) 1807

20. A figura abaixo mostra a trajetória de um móvel a partir de um ponto A, com $\overline{BC} = \overline{CD}$, $\overline{DE} = \overline{EF}$, $\overline{FG} = \overline{GH}$, $\overline{HI} = \overline{IJ}$ e assim por diante.



Considerando infinita a quantidade desses segmentos, a distância horizontal AP alcançada por esse móvel será de:

a) 65 m b) 72 m c) 80 m d) 96 m e) 100 m

21. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z-3 & z \end{bmatrix}$ matrizes reais tais que o produto AB é uma matriz antissimétrica. Das afirmações abaixo:

I. BA é antissimétrica;
II. BA não é inversível;
III. O sistema $(BA)X = 0$, com $X^t = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$, admite infinitas soluções, é (são) verdadeira(s)

a) Apenas I e II. b) Apenas II e III. c) Apenas I.
d) Apenas II. e) Apenas III.

22. Considere a equação $A(t)\,X = B\,(t),\ t \in \mathbb{R}$, em que

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $\det\ A(t) = 1$ e $t \neq 0$, os valores de x, y e z são, respectivamente,

a) $2\sqrt{2},\ 0,\ -3\sqrt{2}$. b) $-2\sqrt{2},\ 0,\ -3\sqrt{2}$.
c) $0,\ 3\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}$. d) $0,\ 2\sqrt{3},\ \sqrt{3}$.
e) $2\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 0$.

23. Um caixa eletrônico de certo banco dispõe apenas de cédulas de 20 e 50 reais. No caso de um saque de 400 reais, a probabilidade do número de cédulas entregues ser ímpar é igual a

a) $\frac{1}{4}$. b) $\frac{2}{5}$. c) $\frac{2}{3}$. d) $\frac{3}{5}$.

24. Em um condomínio residencial, há 120 casas e 230 terrenos sem edificações. Em um determinado mês, entre as casas, 20% dos proprietários associados a cada casa estão com as taxas de condomínio atrasadas, enquanto que, entre os proprietários associados a cada terreno, esse percentual é de 10%. De posse de todos os boletos individuais de cobrança das taxas em atraso do mês, o administrador do empreendimento escolhe um boleto ao acaso. A probabilidade de que o boleto escolhido seja de um proprietário de terreno sem edificação é de

a) $\frac{24}{350}$ b) $\frac{24}{47}$ c) $\frac{47}{350}$ d) $\frac{23}{350}$ e) $\frac{23}{47}$

25. Em uma secretaria, dois digitadores atendem 3 departamentos. Se em cada dia útil um serviço de digitação é solicitado por departamento a um digitador escolhido ao acaso, a probabilidade de que, em um dia útil, nenhum digitador fique ocioso, é

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{8}$

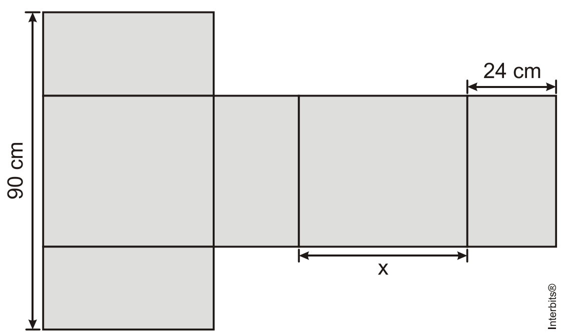
26. Se escolhermos, ao acaso, um elemento do conjunto dos divisores inteiros positivos do número 360, a probabilidade de esse elemento ser um número múltiplo de 12 é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{8}$

27. O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é $0{,}20$.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é
a) $0{,}02048$. b) $0{,}08192$. c) $0{,}24000$.
d) $0{,}40960$. e) $0{,}49152$.

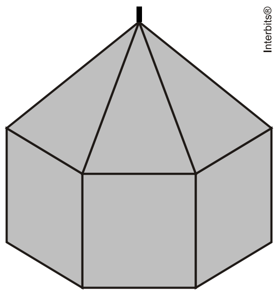
28. Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115cm.
A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.



O maior valor possível para x, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é

a) 25. b) 33. c) 42. d) 45. e) 49.

29. Uma empresa fabrica porta-joias com a forma de prisma hexagonal regular, com uma tampa no formato de pirâmide regular, como mostrado na figura.



As faces laterais do porta-joias são quadrados de lado medindo 6 cm e a altura da tampa também vale 6 cm. A parte externa das faces laterais do porta-joias e de sua tampa são revestidas com um adesivo especial, sendo necessário determinar a área total revestida para calcular o custo de fabricação do produto. A área da parte revestida, em cm^2, é igual a

a) $72(3+\sqrt{3})$. b) $36(6+\sqrt{5})$. c) $108(2+\sqrt{5})$.
d) $27(8+\sqrt{7})$. e) $54(4+\sqrt{7})$.

30. Considere um prisma regular reto de base hexagonal tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Aumentando-se a aresta da base em 2 cm e mantendo-se a aresta lateral, o volume do prisma ficará aumentado de 108 cm^3. O volume do prisma original é

a) 18 cm^3. b) 36 cm^3. c) $18\sqrt{3}$ cm^3.
d) $36\sqrt{3}$ cm^3. e) 40 cm^3.

31. Em um sistema de coordenadas cartesianas no espaço, os pontos $A(3, 2, 5)$, $B(5, 2, 5)$, $C(5, 4, 5)$ e $D(3, 4, 5)$ são os vértices da base de uma pirâmide regular de volume 8. O vértice V dessa pirâmide, que tem as três coordenadas positivas, está localizado no ponto

a) $(2, 1, 5)$. b) $(3, 2, 2)$. c) $(3, 2, 6)$. d) $(4, 3, 7)$. e) $(4, 3, 11)$.

32. Prato da culinária japonesa, o *temaki* é um tipo de sushi na forma de cone, enrolado externamente com nori, uma espécie de folha feita a partir de algas marinhas, e recheado com arroz, peixe cru, ovas de peixe, vegetais e uma pasta de maionese e cebolinha.

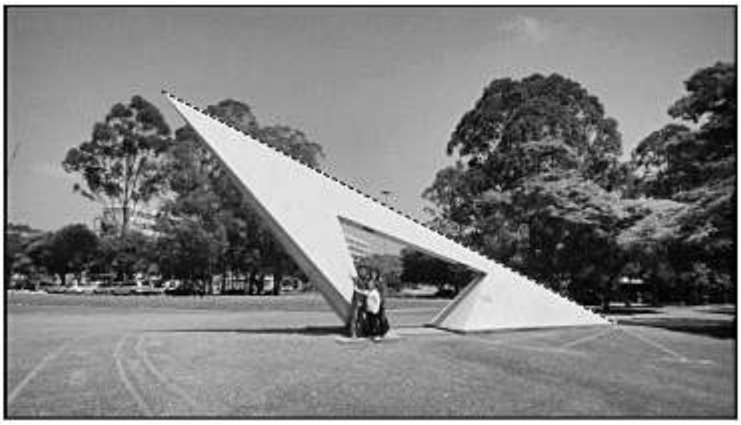
Um *temaki* típico pode ser representado matematicamente por um cone circular reto em que o diâmetro da base mede 8 cm e a altura 10 cm. Sabendo-se que, em um *temaki* típico de salmão, o peixe corresponde a 90% da massa do seu recheio, que a densidade do salmão é de 0,35 g/cm^3, e tomando $\pi = 3$, a quantidade aproximada de salmão, em gramas, nesse *temaki*, é de

a) 46. b) 58. c) 54. d) 50. e) 62.

33. Considere que uma laranja tem a forma de uma esfera de raio 4 cm, composta de 12 gomos exatamente Iguais. A superfície total de cada gomo mede:

a) $\frac{4^3 \pi}{3}$ cm^2 b) $\frac{4^3 \pi}{9}$ cm^2 c) $\frac{4^2 \pi}{3}$ cm^2
d) $\frac{4^2 \pi}{9}$ cm^2 e) $4^3 \pi$ cm^2

34.



Relógio Solar é um projeto de Caetano Fraccaroli, executado por Vera Pallamin.

Esta foto é do relógio solar localizado no *campus* do Butantã, da USP. A linha inclinada (tracejada na foto), cuja projeção ao chão pelos raios solares indica a hora, é paralela ao eixo de rotação da Terra. Sendo μ e ρ, respectivamente, a latitude e a longitude do local, medidas em graus, pode-se afirmar, corretamente, que a medida em graus do ângulo que essa linha faz com o plano horizontal é igual a

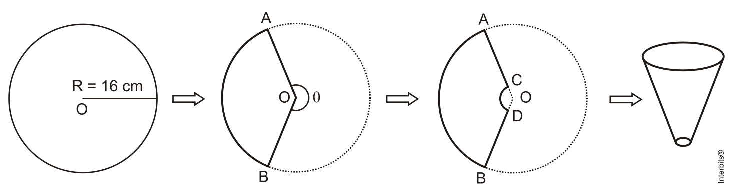
Nota:
Entende-se por “plano horizontal”, em um ponto da superfície terrestre, o plano perpendicular à reta que passa por esse ponto e pelo centro da Terra.

a) ρ b) μ c) $90-\rho$ d) $90-\mu$ e) $180-\rho$

35. Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles ABC em torno de uma reta paralela à base $\overline{BC}$ que dista 0, 25 cm do vértice A e 0, 75 cm da base $\overline{BC}$. Se o lado $\overline{AB}$ mede $\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}$ cm, o volume desse sólido, em cm^3, é igual a

a) $\frac{9}{16}$. b) $\frac{13}{96}$. c) $\frac{7}{24}$. d) $\frac{9}{24}$. e) $\frac{11}{96}$.

36. Para construir um funil a partir de um disco de alum□nio de centro O e raio $R = 16$ cm, retira-se do disco um setor circular de lartnec olugnâ $\theta = 225°$.
Em seguida, remove-se um outro setor circular, de raio $r = 1$ cm. Para finalizar, soldam-se as bordas AC e BD. O processo de constru□□o do funil est□ representado nas figuras abaixo.



A medida da altura do funil ,

a) $2\sqrt{39}$ cm b) $\dfrac{15\sqrt{39}}{8}$ cm c) $\dfrac{\sqrt{55}}{8}$ cm

d) $2\sqrt{55}$ cm e) $\dfrac{15\sqrt{55}}{8}$ cm

37. Considere, no plano cartesiano, o triângulo retângulo determinado pelos eixos coordenados e pela reta de equação 12x + 5y = 60. A medida do raio da circunferência inscrita nesse triângulo é igual a

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

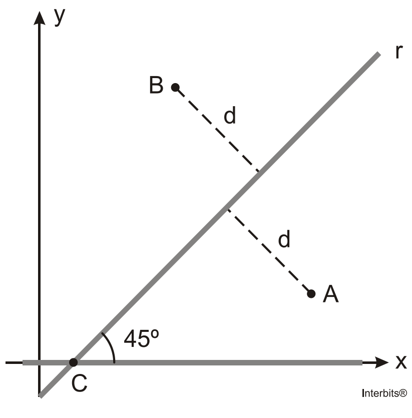
38. Seja ABC um triângulo de vértices A = (1, 4), B = (5, 1) e C = (5, 5). O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede, em unidades de comprimento,

a) $\dfrac{15}{8}$. b) $\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$. c) $\dfrac{3\sqrt{17}}{5}$. d) $\dfrac{5\sqrt{17}}{8}$. e) $\dfrac{17\sqrt{5}}{8}$.

39. Considere o triângulo ABC no plano cartesiano com vértices $A=(0,0), B=(3,4)$ e $C=(8,0)$. O retângulo $MNPQ$ tem os vértices M e N sobre o eixo das abscissas, o vértice Q sobre o lado AB e o vértice P sobre o lado BC. Dentre todos os retângulos construídos desse modo, o que tem área máxima é aquele em que o ponto P é

a) $\left(4,\dfrac{16}{5}\right)$ b) $\left(\dfrac{17}{4},3\right)$ c) $\left(5,\dfrac{12}{5}\right)$ d) $\left(\dfrac{11}{2},2\right)$ e) $\left(6,\dfrac{8}{5}\right)$

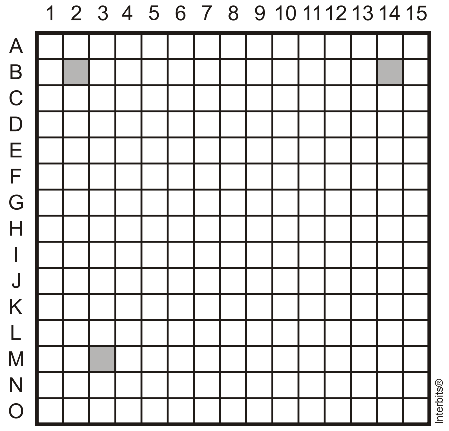
40. No plano cartesiano da figura, feito fora de escala, o eixo x representa uma estrada já existente, os pontos A(8, 2) e B(3, 6) representam duas cidades e a reta r, de inclinação 45°, representa uma estrada que será construída.



Para que as distâncias da cidade A e da cidade B até a nova estrada sejam iguais, o ponto C, onde a nova estrada intercepta a existente, deverá ter coordenadas

a) $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$. b) $(1,0)$. c) $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$. d) $(2,0)$. e) $\left(\dfrac{5}{2},0\right)$.

41. A figura mostra um tabuleiro de um jogo Batalha Naval, em que André representou três navios nas posições dadas pelas coordenadas B2, B14 e M3. Cada navio está identificado por um quadrado sombreado.



André deseja instalar uma base em um quadrado do tabuleiro cujo centro fique equidistante dos centros dos três quadrados onde foram posicionados os navios. Para isso, a base deverá estar localizada no quadrado de coordenadas

a) G8. b) G9. c) H8. d) H9. e) H10.

42. Os pontos $A(3,-2)$ e $C(-1,4)$ do plano cartesiano são vértices de um quadrado ABCD cujas diagonais são AC e BD. A reta suporte da diagonal BD intercepta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada:

a) 2/3 b) 3/5 c) 1/2 d) 1/3 e) 0

43. Sejam dados a circunferência $\lambda : x^2+y^2+4x+10y+25=0$ e o ponto P, que é simétrico de (–1, 1) em relação ao eixo das abscissas. Determine a equação da circunferência concêntrica à λ e que passa pelo ponto P.

a) $\lambda : x^2+y^2+4x+10y+16=0$

b) $\lambda : x^2+y^2+4x+10y+12=0$

c) $\lambda : x^2-y^2+4x-5y+16=0$

d) $\lambda : x^2+y^2-4x-5y+12=0$

e) $\lambda : x^2-y^2-4x-10y-17=0$

44. A equação do círculo localizado no 1º quadrante que tem área igual a 4π (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às retas $r: 2x-2y+5=0$ e $s: x+y-4=0$ é

a) $\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{10}{4}\right)^2=4.$

b) $\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(y-\left(2\sqrt{2}+\dfrac{3}{4}\right)\right)^2=4.$

c) $\left(x-\left(2\sqrt{2}+\dfrac{3}{4}\right)\right)^2+\left(y-\dfrac{10}{4}\right)^2=4.$

d) $\left(x-\left(2\sqrt{2}+\dfrac{3}{4}\right)\right)^2+\left(y-\dfrac{13}{4}\right)^2=4.$

e) $\left(x-\left(2\sqrt{2}+\dfrac{3}{4}\right)\right)^2+\left(y-\dfrac{11}{4}\right)^2=4.$

45. Vitória-régia é uma planta aquática típica da região amazônica. Suas folhas são grandes e têm formato circular,

com uma capacidade notável de flutuação, graças aos compartimentos de ar em sua face inferior.
Em um belo dia, um sapo estava sobre uma folha de vitória-régia, cuja borda obedece à equação $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0,$ apreciando a paisagem ao seu redor. Percebendo que a folha que flutuava à sua frente era maior e mais bonita, resolveu pular para essa folha, cuja borda é descrita pela equação $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 1 = 0.$

A distância linear mínima que o sapo deve percorrer em um salto para não cair na água é

a) $2(\sqrt{2} - 1)$ b) 2 c) $2\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2} - 2$ e) $\sqrt{5}$

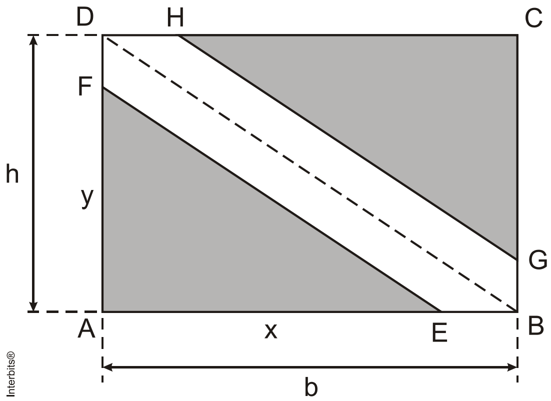
46. Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas química e física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas.
O quadro apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais.

Candidato	**Química**	**Física**
I	20	23
II	X	25
III	21	18

A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de química para vencer a competição é

a) 18. b) 19. c) 22. d) 25. e) 26.

47. Considere o retângulo ABCD da figura, de dimensões $\overline{AB} = b$ e $\overline{AD} = h,$ que foi dividido em três regiões de áreas iguais pelos segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{GH}.$



As retas $\overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são paralelas. Dessa forma, sendo $\overline{AE} = x$ e $\overline{AF} = y,$ a razão $\dfrac{x}{b}$ é igual a

a) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ d) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}.$ e) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

48. Em um triângulo isósceles $ABC,$ cuja área mede $48\,cm^2,$ a razão entre as medidas da altura AP e da base BC é igual a $\dfrac{2}{3}.$ Das afirmações abaixo:

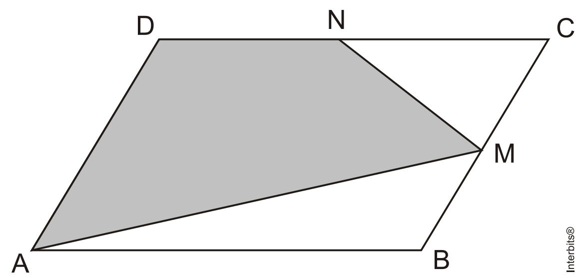
I. As medianas relativas aos lados AB e AC medem $\sqrt{97}$ cm;
II. O baricentro dista 4 cm do vértice A;
III. Se α é o ângulo formado pela base BC com a mediana $BM,$ relativa ao lado $AC,$ então $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{97}},$

é (são) verdadeira(s)
a) Apenas I. b) Apenas II. c) Apenas III.
d) Apenas I e III. e) Apenas II e III.

49. Em um treinamento da arma de Artilharia, existem 3 canhões A, B e C. Cada canhão, de acordo com o seu modelo, tem um raio de alcance diferente e os três têm capacidade de giro horizontal de 360°. Sabendo que as distâncias entre A e B é de 9 km, entre B e C é de 8 km e entre A e C é de 6 km, determine, em km^2, a área total que está protegida por esses 3 canhões, admitindo que os círculos são tangentes entre si.

a) $\dfrac{23}{2}\pi$ b) $\dfrac{23}{4}\pi$ c) $\dfrac{385}{8}\pi$ d) $\dfrac{195}{4}\pi$ e) $\dfrac{529}{4}\pi$

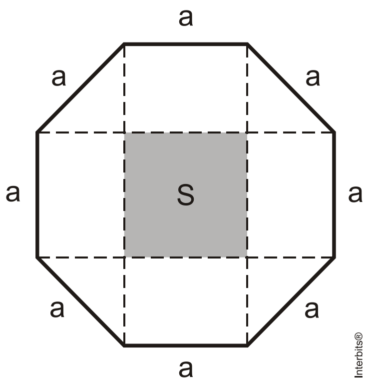
50. Na figura abaixo, $ABCD$ é um paralelogramo de área $24\,cm^2.$ M e N são pontos médios de BC e $CD,$ respectivamente.



A área do polígono $AMND$ é igual a:

a) 20 cm^2 b) 16 cm^2 c) 12 cm^2 d) 15 cm^2 e) 18 cm^2

51. As disputas de MMA (Mixed Martial Arts) ocorrem em ringues com a forma de octógonos regulares com lados medindo um pouco menos de 4 metros, conhecidos como “Octógonos”. Medindo o comprimento exato de seus lados, pode-se calcular a área de um “Octógono” decompondo-o, como mostra a figura a seguir, em um quadrado, quatro retângulos e quatro triângulos retângulos e isósceles.



A medida do lado do quadrado destacado no centro da figura é igual à medida a do lado do "Octógono". Se a área desse quadrado é S, então a área do "Octógono" vale

a) $S(2\sqrt{2}+1)$. b) $S(\sqrt{2}+2)$. c) $2S(\sqrt{2}+1)$.
d) $2S(\sqrt{2}+2)$. e) $4S(\sqrt{2}+1)$.

52. O triângulo AOB é isósceles, com $\overline{OA}=\overline{OB}$, e ABCD é um quadrado. Sendo θ a medida do ângulo $A\hat{O}B$, pode-se garantir que a área do quadrado é maior do que a área do triângulo se

Dados os valores aproximados:
$\text{tg } 14° \cong 0,2493$, $\text{tg } 15° \cong 0,2679$
$\text{tg } 20° \cong 0,3640$, $\text{tg } 28° \cong 0,5317$

a) $14° < \theta < 28°$ b) $15° < \theta < 60°$ c) $20° < \theta < 90°$
d) $25° < \theta < 120°$ e) $30° < \theta < 150°$

53. Um retângulo tem comprimento X e largura Y, sendo X e Y números positivos menores do que 100. Se o comprimento do retângulo aumentar Y% e a largura aumentar X%, então a sua área aumentará

a) $\left(X+Y+\dfrac{XY}{100}\right)\%$.
b) $\left(XY+\dfrac{X+Y}{100}\right)\%$.
c) $\left(\dfrac{X+Y+XY}{100}\right)\%$.
d) $(X+Y)\%$.
e) $(XY)\%$.

54. Para fazer parte do time de basquete de uma escola, é necessário ter, no mínimo, 11 anos. A média das idades dos cinco jogadores titulares desse time é 13 anos, sendo que o mais velho deles tem 17 anos. Dessa forma, o segundo mais velho do time titular pode ter, no máximo,

a) 17 anos. b) 16 anos. c) 15 anos. d) 14 anos. e) 13 anos.

55. Um pesquisador está realizando várias séries de experimentos com alguns reagentes para verificar qual o mais adequado para a produção de um determinado produto. Cada série consiste em avaliar um dado reagente em cinco experimentos diferentes. O pesquisador está especialmente interessado naquele reagente que apresentar a maior quantidade dos resultados de seus experimentos acima da média encontrada para aquele reagente. Após a realização de cinco séries de experimentos, o pesquisador encontrou os seguintes resultados:

	Reagente 1	Reagente 2	Reagente 3
Experimento 1	1	0	2
Experimento 2	6	6	3
Experimento 3	6	7	8
Experimento 4	6	6	10
Experimento 5	11	5	11

Levando-se em consideração os experimentos feitos, o reagente que atende às expectativas do pesquisador é o

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

56. A Figura 1 representa uma gravura retangular com 8m de comprimento e 6m de altura.

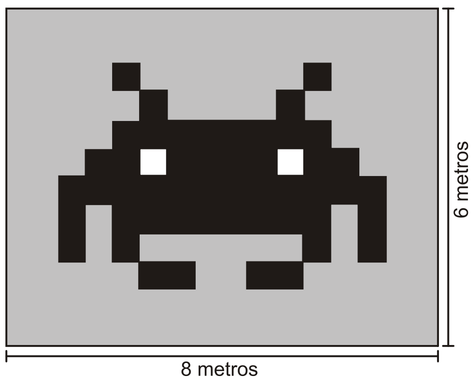


Figura 1

Deseja-se reproduzi-la numa folha de papel retangular com 42cm de comprimento e 30cm de altura, deixando livres 3cm em cada margem, conforme a Figura 2.

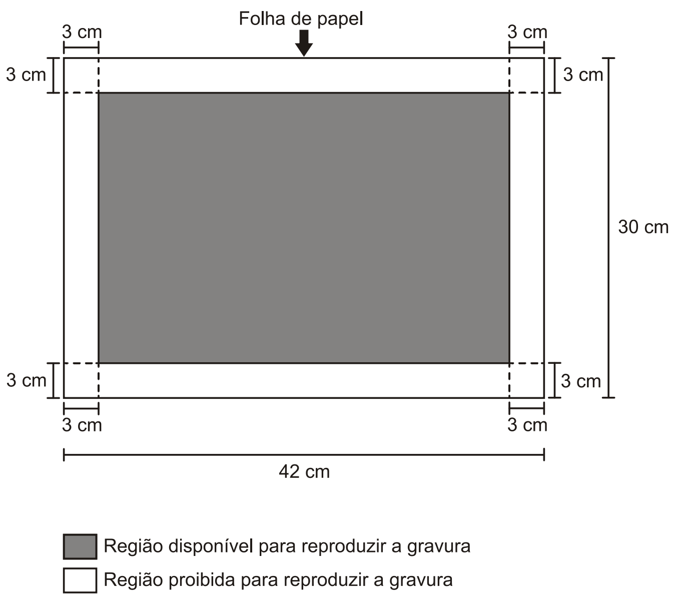


Figura 2

A reprodução da gravura deve ocupar o máximo possível da região disponível, mantendo-se as proporções da Figura 1.

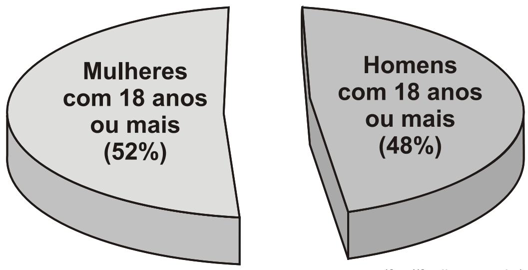
PRADO, A. C. *Superinteressante*, ed. 301, fev. 2012 (adaptado).

A escala da gravura reproduzida na folha de papel é

a) $1:3$. b) $1:4$. c) $1:20$. d) $1:25$. e) $1:32$.

57**.** Considere os dados aproximados, obtidos em 2010, do Censo realizado pelo IBGE.

Idade (anos)	**Nº de pessoas**
De 0 a 17	56 300 000
De 18 a 24	23 900 000
De 25 a 59	90 000 000
60 ou mais	20 600 000
Total	190 800 000



(ftp://ftp.ibge.gov.br)

A partir das informações, é correto afirmar que o número aproximado de mulheres com 18 anos ou mais, em milhões, era

a) 70. b) 52. c) 55. d) 59. e) 65.

58**.** Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionado à Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão:

$$\text{Valor do kWh (com tributos)} \times \text{consumo (em kWh)} + \text{Cosip}$$

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo. O quadro mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	**Valor da Cosip (R$)**
Até 80	0,00
Superior a 80 até 100	2,00
Superior a 100 até 140	3,00
Superior a 140 até 200	4,50

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de $150\ \text{kWh}$, e o valor do kWh (com tributos) seja de R$ 0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%.

Qual deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

a) 134,1 b) 135,0 c) 137,1 d) 138,6 e) 143,1

59**.** Apenas dois candidatos se apresentaram para a eleição ao cargo de prefeito de uma pequena cidade do interior. O candidato A recebeu 60% dos votos, sendo 70% de mulheres. O candidato B recebeu 35% dos votos, sendo 60% de homens. Sabendo-se que 620 pessoas votaram em branco ou anularam o voto, podemos avaliar que o número de mulheres que votaram em A ou em B foi:

a) 7 816 b) 6 338 c) 8 116 d) 7 228 e) 6 944

60**.** Uma loja que vende sapatos recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de sapatos de cor branca ou preta. Os donos da loja anotaram as numerações dos sapatos com defeito e fizeram um estudo estatístico com o intuito de reclamar com o fabricante.
A tabela contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pelos donos.

Estatísticas sobre as numerações dos sapatos com defeito			
	Média	Mediana	Moda
Numerações dos sapatos com defeito	36	37	38

Para quantificar os sapatos pela cor, os donos representaram a cor branca pelo número 0 e a cor preta pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses zeros e uns é igual a $0,45$.
Os donos da loja decidiram que a numeração dos sapatos com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas.

A loja encaminhou um ofício ao fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados os sapatos de cor

a) branca e os de número 38.
b) branca e os de número 37.
c) branca e os de número 36.
d) preta e os de número 38.
e) preta e os de número 37.

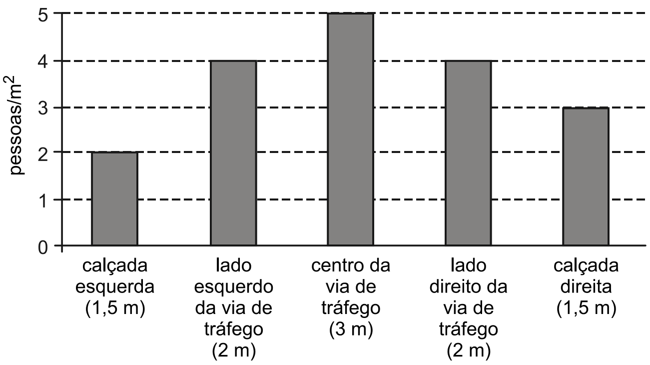
61**.** Em ocasiões de concentração popular, frequentemente lemos ou escutamos informações desencontradas a respeito do número de participantes. Exemplo disso foram as informações divulgadas sobre a quantidade de manifestantes em um dos protestos na capital paulista, em junho passado. Enquanto a Polícia Militar apontava a participação de 30 mil pessoas, o Datafolha afirmava que havia, ao menos, 65 mil.


(www.folha.com.br)

Tomando como base a foto, admita que:

(1) a extensão da rua plana e linear tomada pela população seja de 500 metros;

(2) o gráfico forneça o número médio de pessoas por metro quadrado nas diferentes sessões transversais da rua;



(3) a distribuição de pessoas por m^2 em cada sessão transversal da rua tenha sido uniforme em toda a extensão da manifestação.

Nessas condições, o número estimado de pessoas na foto seria de

a) 19 250. b) 5 500. c) 7 250. d) 38 500. e) 9 250.

62. Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário para cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R$400.000,00, distribuídos de acordo com o Gráfico 1. No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para 2014. O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de instrução, está no Gráfico 2.

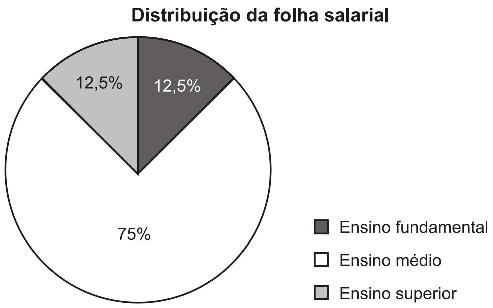


Gráfico 1

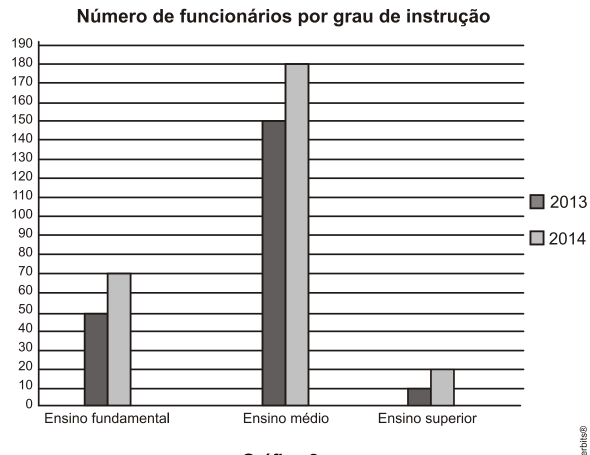


Gráfico 2

Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

a) R$114.285,00

b) R$130.000,00

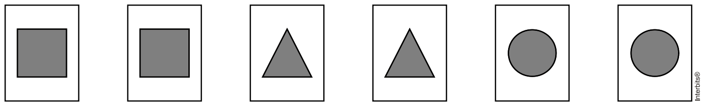
c) R$160.000,00

d) R$210.000,00

e) R$213.333,00

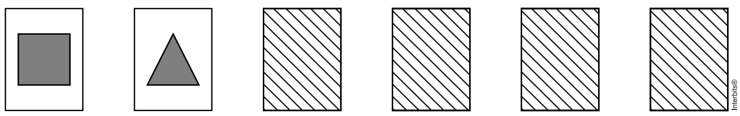
TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Em um curso de computação, uma das atividades consiste em criar um jogo da memória com as seis cartas mostradas a seguir.



Inicialmente, o programa embaralha as cartas e apresenta-as viradas para baixo. Em seguida, o primeiro jogador vira duas cartas e tenta formar um par.

63. Suponha que o primeiro jogador tenha virado as duas cartas mostradas abaixo.



Como não foi feito par, o programa desvira as duas cartas e é a vez do segundo jogador, que utiliza a seguinte estratégia: ele vira uma das quatro cartas que não foi virada pelo primeiro jogador. Se a carta virada for um quadrado ou um triângulo, ele certamente forma um par, pois sabe onde está a carta correspondente. Caso contrário, ele vira uma das outras três cartas que ainda não foram viradas. A probabilidade de que o segundo jogador forme um par usando a estratégia descrita é

a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{5}{8}$. c) $\frac{2}{3}$. d) $\frac{3}{4}$. e) $\frac{5}{6}$.

Gabarito:

Resposta da questão 1:
[C]

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Química]
Cálculo do volume da grafita:

$$
\begin{aligned}
&\text{diâmetro} = 2\text{ mm de espessura} = 2\times10^{-3}\text{ m} = 2\times10^{-1}\text{ cm}\\
&\text{raio} = 1\text{ mm de espessura} = 10^{-1}\text{ m}\\
&\text{altura} = 15\text{ cm}\\
&V_{\text{cilindro}} = (\text{Área da base})\times(\text{altura})\\
&V_{\text{cilindro}} = \pi\times r^2\times h\\
&V_{\text{cilindro}} = \pi\times(10^{-1})^2\times15\\
&V_{\text{cilindro}} = 0{,}471\text{ cm}^3\\
&d_{\text{grafita}} = 2{,}2\text{ g}/\text{cm}^3\\
&\quad 1\text{ cm}^3 \text{ —— } 2{,}2\text{ g}\\
&0{,}471\text{ cm}^3 \text{ —— } m_{\text{grafita}}\\
&m_{\text{grafita}} = 1{,}0362\text{ g}\\
&\quad 12\text{ g de grafita —— } 6{,}0\times10^{23}\text{ átomos de carbono}\\
&1{,}0362\text{ g de grafita —— } x\\
&x = 5{,}18\times10^{22}\text{ átomos de carbono}
\end{aligned}
$$

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Matemática]
Tem-se que o volume de grafite é dado por

$$
\begin{aligned}
\pi\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot h &\cong 3{,}14\cdot\left(\frac{0{,}2}{2}\right)^2\cdot15\\
&\cong 0{,}47\text{ cm}^3.
\end{aligned}
$$

Daí, sabendo que a densidade da grafita é $2{,}2\text{ g/cm}^3$, vem que a massa de grafite é igual a $m = 2{,}2\cdot0{,}47 \cong 1{,}03\text{ g}.$

Portanto, sendo n o número de átomos de carbono presentes nessa grafite, temos

$$n\cdot\frac{12}{6\cdot10^{23}} = 1{,}03 \Rightarrow n \cong 5\cdot10^{22}.$$

Resposta da questão 2:
[E]

[I] Falsa. Tem-se que $a_{n+1} = (n+2)^2.$ Logo, como a razão

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+3)^2}{(n+2)^2} = \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^2$$

não é constante, segue que a_n não é uma progressão geométrica.

[II] Falsa. De fato, a razão

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{(n+1)^2}}{2^{n^2}} = 2^{n^2+2n+1-n^2} = 2^{2n+1}$$

não é constante. Daí, podemos concluir que b_n não é uma progressão geométrica.

[III] Verdadeira. A diferença entre quaisquer dois termos consecutivos da sequência c_n é

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= (n+1)^2 + 4(n+1) + 4 - (n^2 + 4n + 4)\\
&= n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 - n^2 - 4n - 4\\
&= 2n + 1.
\end{aligned}
$$

Desse modo, c_n é uma progressão aritmética de primeiro termo 3 e razão igual a $2.$

[IV] Verdadeira. De (II), temos $d_n = 2^{2n+1},$ que é uma progressão geométrica de primeiro termo 8 e razão igual a $4.$

Resposta da questão 3:
[B]

Comprimento de uma semicircunferência de raio $r : \frac{2\pi r}{2} = \pi\cdot r$

Logo, a soma pedida será dada por:

$$
\begin{aligned}
&S = \pi\cdot1 + \pi\cdot2 + \pi\cdot4 + \pi\cdot8 + \ldots\\
&S = \pi\cdot(1+2+4+8+\ldots)\\
&S = \pi\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\
&S = 2\cdot\pi
\end{aligned}
$$

Resposta da questão 4:
[A]

O determinante da matriz dos coeficientes é igual a

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = a - 1.$$

Logo, se $a \neq 1$ o sistema possui solução única. Por outro lado, se $a = 1,$ devemos tomar a matriz ampliada do sistema para continuar a discussão. Com efeito, escalonando a matriz ampliada, vem

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & m\end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & m-1\end{pmatrix}\\
&\quad L_3{}' \to (-1)\cdot L_1 + L_3\\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & m-2\end{pmatrix}.\\
&\quad L_2{}'' \to (-1)\cdot L_2{}' + L_3{}'
\end{aligned}
$$

Portanto, o sistema possui solução única para $a \neq 1$ e $m \in \mathbb{R}$; possui infinitas soluções se $a = 1$ e $m = 2;$ e não possui solução se $a = 1$ e $m \neq 2.$

Resposta da questão 5:
[D]

Divisíveis por 4: $A = \{4, 8, 12, 16, 20, \dots, 48\}$ e $n(A) = 12$
Divisíveis por 5: $B = \{5, 10, 15, \dots, 50\}$ e $n(B) = 10$

Divisíveis por 4 e 5: $A \cap B = \{20, 40\}$ e $n(A \cap B) = 2$

Portanto, a probabilidade pedida será:

$$P = \frac{12 \cdot 10 - 2 \cdot 1}{50 \cdot 49} = \frac{118}{2450} = \frac{59}{1225}$$

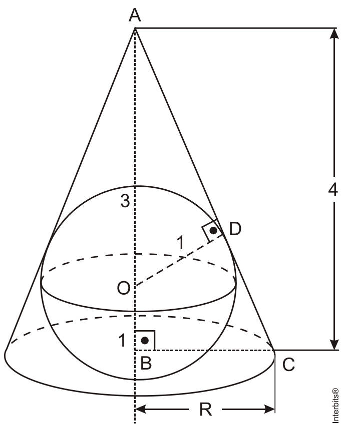
Resposta da questão 6:
[E]

Sabendo que $ABCDEFGH$ é paralelepípedo reto, temos $\overline{EF} = \overline{AB}$ e $\overline{EH} = \overline{AD}$. Portanto, segue que o resultado pedido é dado por

$$\begin{aligned}[SABCD] + [ABCDHEFG] = \frac{4}{3} \cdot [SEFGH] &\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \overline{SA} + \overline{AE} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}(\overline{AE} + \overline{SA}) \\ &\Leftrightarrow 3 \cdot \overline{SA} + 9 \cdot 2 = 4 \cdot (2 + \overline{SA}) \\ &\Leftrightarrow \overline{SA} = 10\,\text{cm}.\end{aligned}$$

Resposta da questão 7:
[D]

Considerando O o centro da esfera, temos:



No triângulo AOD, temos: $AD^2 + 1^2 = 3^2 \Rightarrow AD = \sqrt{8}\,\text{cm}$

$$\Delta ADO - \Delta ABC \Rightarrow \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{4}{\sqrt{8}}\,\text{cm}$$

Portanto, o volume V do cone será dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{8}}\right)^2 \cdot 4 = \frac{8 \cdot \pi}{3}\,\text{cm}^3$$

Resposta da questão 8:
[D]

Supondo que $x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$|x - y| = |x + y| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x - y = x + y \\ \quad\text{ou} \\ x - y = -x - y \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \text{ e } y = 0 \\ \quad\text{ou} \\ x = 0 \text{ e } y \in \mathbb{R} \end{array}\right. ,$$

ou seja, a equação representa os eixos cartesianos, cuja interseção é a origem.

Resposta da questão 9:
[A]

Completando os quadrados, vem

$$x^2 + 2x + y^2 + my = n \Leftrightarrow (x+1)^2 + \left(y + \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + n + 1.$$

Logo, como o centro $C = \left(-1, -\frac{m}{2}\right)$ pertence à reta $y = -x + 1$, segue que

$$-\frac{m}{2} = -(-1) + 1 \Leftrightarrow m = -4.$$

Por conseguinte, sabendo que a reta intersecta a circunferência em $(-3, 4)$, obtemos

$$\begin{aligned} n &= x^2 + 2x + y^2 + my \\ &= (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 4^2 + (-4) \cdot 4 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Resposta da questão 10:
[A]

Considerando, $(r)\ 2x + 3y - 4 = 0$ e $P(1, 5)$
Determinando a equação da reta (s) perpendicular a reta (r) e que passa pelo ponto $(1, 5)$

$$\begin{aligned} (s)\ 3x - 2y + k &= 0 \\ 3 - 10 + k &= 0 \\ k &= 7 \end{aligned}$$

Logo, a equação da reta (s) será dada por $3x - 2y + 7 = 0$.

Determinando, o ponto M de intersecção das retas r e s.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 3x - 2y + 7 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $M(-1, 2)$.

Determinando agora o ponto A simétrico do ponto p em relação à reta r, M é ponto médio de PA.

$$\frac{1 + x_A}{2} = -1 \Rightarrow x_A = -3$$
$$\frac{5 + x_A}{2} = 2 \Rightarrow x_A = -1$$

Logo, $A(-3, -1)$.

Resposta da questão 11:
[A]

[I] Verdadeira.
Vamos admitir os pontos médios da forma $M(x, y)$ e O a origem. Como os pontos A e B estão sobre os eixos, concluímos que o triângulo AOB é retângulo de hipotenusa l, portanto, $OM = \frac{l}{2}$.

Daí, temos:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{l^2}{4}$$

Portanto, uma circunferência de raio l/2.

[II] Falsa.

$$6x^3 + x^2y - xy^2 - 4x^2 - 2xy = 0$$
$$x \cdot (6x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y) = 0$$
$$x \cdot (4x^2 - y^2 + 2x^2 + xy - 4x - 2y) = 0$$
$$x \cdot ((2x + y) \cdot (2x - y) + x \cdot (2x + y) - 2 \cdot (2x + y)) = 0$$
$$x \cdot (2x + y) \cdot (2x - y + x - 2) = 0$$
$$x \cdot (2x + y) \cdot (3x - y - 2) = 0$$

Temos então três equações de reta:

$x = 0$

$2x + y = 0$

$3x - y - 2 = 0$

Portanto, temos infinitos pontos.

[III] Falsa. Os pontos estão alinhados, pois:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 9 + 4 + 3 - 2 - 12 = 0$$

Resposta da questão 12:
[C]

Sabemos que a massa de proteína é proporcional à quantidade do alimento. Logo, tomando $20\,g$ do alimento B, a quantidade do alimento A para que as porções sejam isocalóricas é igual a $\frac{80 \cdot 20}{60} = \frac{80}{3}\,g$. Desse modo, a massa de proteína presente nessa porção do alimento A é $\frac{80 \cdot 6}{3 \cdot 20} = 8\,g$ e, portanto, segue que o resultado pedido é $\frac{8}{1} = 8$.

Resposta da questão 13:
[D]

Para as crianças nascidas em 2004, considere a tabela abaixo.

Idades	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
$[15, 19]$	17	0,199	3,38
$[20, 24]$	22	0,307	6,75
$[25, 29]$	27	0,237	6,40
$[30, 34]$	32	0,148	4,74
$[35, 39]$	37	0,073	2,70
			$\sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 23,97$

Desse modo, podemos concluir que a idade média das mães das crianças nascidas em 2004 foi maior do que $23,97 > 22$ anos.

Resposta da questão 14:
[B]

Sejam t, m e n, respectivamente, o total gasto, o número de viagens simples e o número de viagens de integração. Logo, devemos calcular o valor mínimo de t que satisfaça $t = 3 \cdot m + 4,65 \cdot n$ e $t > 12,5$.

Observando que $4,65 \cdot 3 > 12,5$, basta tomarmos $n \le 3$ e um valor conveniente de m para obtermos o resultado desejado. Com efeito, vejamos:

1. se $n = 3$ e $m = 0$, temos $t = 3 \cdot 4,65 = 13,95$;
2. se $n = 2$ e $m = 2$, temos $t = 3 \cdot 2 + 4,65 \cdot 2 = 15,30$;
3. se $n = 1$ e $m = 3$, temos $t = 3 \cdot 3 + 4,65 \cdot 1 = 13,65$;
4. se $n = 0$ e $m = 5$, temos $t = 3 \cdot 5 = 15,00$.

Portanto, segue que o menor valor de recarga para o qual seria possível zerar o saldo do bilhete após algumas utilizações é $13,65 - 12,5 = R\$\,1,15$.

Resposta da questão 15:
[A]

Como $13 \cdot 10^3\,\text{ton} = 13 \cdot 10^9\,g$ e $200\,mL = 2 \cdot 10^{-1}\,L$, segue que o resultado pedido é igual a $\frac{13 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-1}}{21} \cong 124 \cdot 10^6\,L$.

Resposta da questão 16:
[C]

Se a altura da pirâmide mede $1\,cm$ e seu volume $50\,cm^3$, então a área da base é tal que

$$50 = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{n-2} S_i \cdot 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-2} S_i = 150\,cm^2.$$

Além disso, temos

$$S_6 = S_3 + 3 \cdot r \Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2} + 3 \cdot r$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2} cm^2.$$

Logo,

$$S_3 = S_1 + 2 \cdot r \Leftrightarrow \frac{3}{2} = S_1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow S_1 = \frac{1}{2} cm^2.$$

Por conseguinte, o valor de n é

$$\sum_{i=1}^{n-2} Si = [2 \cdot S_1 + (n-3) \cdot r] \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right) \Leftrightarrow 150 = \left[2 \cdot \frac{1}{2} + (n-3) \cdot \frac{1}{2}\right] \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow (n-1) \cdot (n-2) = 600$$
$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 598 = 0$$
$$\Rightarrow n = 26.$$

Resposta da questão 17:
[C]

Sejam $x, x+r$ e $x+2r$ as medidas, em metros, dos lados do triângulo, com $x, r > 0.$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, encontramos $x = 3r.$ Logo, os lados do triângulo medem $3r, 4r$ e $5r.$

Sabendo que o perímetro do triângulo mede $6{,}0$ m, vem

$$3r + 4r + 5r = 6 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a área do triângulo é igual a

$$\frac{3r \cdot 4r}{2} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1{,}5 \text{ m}^2.$$

Resposta da questão 18:
[C]

Sejam $\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \alpha + 1, \alpha + \frac{3}{2}$ e $\alpha + 2$ as raízes de $p(x).$

Podemos escrever $p(x)$ sob a forma

$$p(x) = x^5 + 0x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Assim, das Relações de Girard, tem-se

$$\alpha + \alpha + \frac{1}{2} + \alpha + 1 + \alpha + \frac{3}{2} + \alpha + 2 = \frac{0}{1} \Leftrightarrow 5\alpha + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha = -1.$$

Portanto,

$$p(x) = x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+1)$$
$$= x(x^2 - 1)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$$
$$= x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{1}{4}x$$

implica em $(a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4}\right).$

Resposta da questão 19:
[E]

Até a 42ª linha, temos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 40 + 41 + 42 = \frac{(1+42) \cdot 42}{2} = 903 \text{ termos}.$$

Portanto, o primeiro elemento da 43ª linha será o 904º número natural ímpar. Então:

$$a_{904} = 1 + 903 \cdot 2 = 1807.$$

Resposta da questão 20:
[C]

Pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo $ABC,$ encontramos facilmente $\overline{AC} = 20$ m.

Os triângulos $ABC, CDE, EFG, \ldots$ são semelhantes por AA. Logo, como a razão de semelhança é igual a $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4},$ segue-se que $\overline{AC} = 20$ m, $\overline{CE} = 15$ m, $\overline{EG} = \frac{45}{4}$ m, ... constituem uma progressão geométrica cujo limite da soma dos n primeiros termos é dado por $\frac{20}{1 - \frac{3}{4}} = 80$ m.

Resposta da questão 21:
[B]

Efetuando o produto AB, temos $AB = \begin{bmatrix} x - y + z + 6 & x - y + z \\ 2x + y + z + 3 & z \end{bmatrix}.$

Como AB é antissimétrica, temos:
$z = 0$
$x - y + z + 6 = 0$
Logo, $x - y = -6$
$2x + y + z + 3 = -(x - y + z)$, então, $3x = -3$, ou seja, $x = -1$ e $y = 5$.

Logo, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix},$ $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 28 & 3 & 8 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$
e det(BA) = 0.

[I] **Falsa**, pois $BA \neq -(BA)^t$.

[II] **Verdadeira**, pois det(BA) = 0.

[III] **Verdadeira**, pois se o sistema linear homogêneo, com determinante é nulo, possui infinitas soluções.

Resposta da questão 22:
[B]

Como $\det A(t) = 1,$ temos

$$\begin{vmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \Leftrightarrow 4e^{-2t} + 3e^{2t} + 1 - 3 - 2e^{-2t} - 2e^{2t} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-2t} + e^{2t} - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{4t} - 3e^{2t} + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{2t} = 1 \text{ ou } e^{2t} = 2.$$

Porém, $t \neq 0$ implica em $e^{2t} = 2$ e, portanto,

$$A(t)X = B(t) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tomando a matriz ampliada do sistema e aplicando as operações elementares sobre matrizes, vem

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$
$$L_2' \to 1 \cdot L_1 + L_2$$
$$L_3' \to 3 \cdot L_1 + L_3$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$
$$L_3'' \to (-5) \cdot L_2' + L_3'$$

Por conseguinte, $x = -2\sqrt{2},$ $y = 0$ e $z = -3\sqrt{2}.$

Resposta da questão 23:
[B]

Sejam x, y e $n,$ respectivamente, o número de cédulas de 20 reais, o número de cédulas de 50 reais e o número total de cédulas, isto é, $n = x + y.$ Logo, para um saque de 400 reais, temos:

$$\begin{cases} 20x + 50y = 400 \\ n = x + y \\ 0 \le x \le 20 \\ 0 \le y \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5n = 40 + 3x \\ 0 \le x \le 20 \\ 0 \le y \le 8 \end{cases}.$$

Como $40 + 3x$ é um múltiplo de $5,$ por inspeção, encontramos

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; (0, 8), (5, 6), (10, 4), (15, 2), (20, 0)\}.$$

Portanto, como os únicos casos favoráveis são $(5, 6)$ e $(15, 2),$ segue-se que a probabilidade pedida é igual a $\frac{2}{5}.$

Resposta da questão 24:
[E]

P: probabilidade pedida.
20% de 120 = 24
10% de 230 = 23

Logo, $P = \frac{23}{23 + 24} = \frac{23}{47}.$

Resposta da questão 25:
[B]

Cada departamento pode solicitar um digitador de 2 maneiras distintas. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, os três departamentos podem solicitar um digitador de $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ modos em um dia útil. Por outro lado, um dos digitadores ficará ocioso, em um dia útil, desde que o outro digitador seja solicitado por todos os departamentos, e isso pode ocorrer de 2 maneiras. Em consequência, a probabilidade pedida é dada por $1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}.$

Resposta da questão 26:
[C]

360 = $2^3.3^2.5$
Número de divisores positivos de 360: (3 + 1).(2 + 1).(1 + 1) = 24

Divisores de 360 que são múltiplos de 12: {12,24,36,60,72,120,180,360} n = 8

Portanto, a probabilidade pedida será: P = 8/24 = 1/3.

Resposta da questão 27:
[B]

Para que o teste termine na quinta pergunta, o candidato deverá errar exatamente uma pergunta dentre as quatro primeiras e errar a quinta. Por conseguinte, o resultado é

$$\binom{4}{1} \cdot (0,8)^3 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 4 \cdot 0,512 \cdot 0,04 = 0,08192.$$

Resposta da questão 28:
[E]

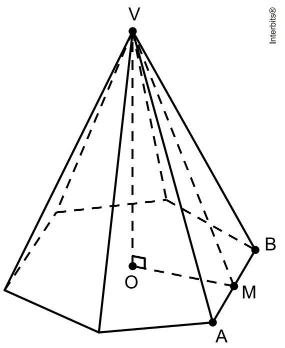
De acordo com a figura, tem-se que a altura da caixa mede $24\text{cm}.$ Além disso, a largura mede $90 - 2 \cdot 24 = 42\text{cm}.$ Daí, o comprimento $x,$ em centímetros, deve ser tal que

$$0 < x + 42 + 24 \le 115 \Leftrightarrow 0 < x \le 49.$$

Portanto, o maior valor possível para $x,$ em centímetros, é $49.$

Resposta da questão 29:
[E]

Considere a figura, em que V é o vértice da pirâmide, O é o centro da base e M é o ponto médio da aresta $AB.$



Desse modo, como $\overline{AB} = 6\text{cm},$ vem

$$\overline{OM} = \frac{\overline{AB}}{2\,\text{tg}\,30^\circ} \Leftrightarrow \overline{OM} = \frac{6}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 3\sqrt{3}\text{ cm}.$$

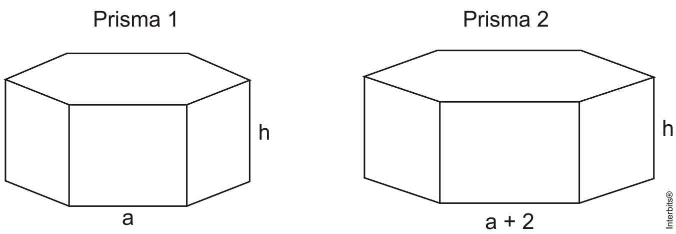
Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $OVM,$ encontramos

$$\overline{VM}^2 = \overline{OV}^2 + \overline{OM}^2 \Rightarrow \overline{VM}^2 = 6^2 + (3\sqrt{3})^2$$
$$\Rightarrow \overline{VM} = 3\sqrt{7}\text{ cm}.$$

Portanto, o resultado pedido é dado por

$$6 \cdot \left(\overline{AB}^2 + \frac{\overline{AB} \cdot \overline{VM}}{2} \right) = 6 \cdot (6^2 + 3 \cdot 3\sqrt{7})$$
$$= 54(4 + \sqrt{7})\text{cm}^2.$$

Resposta da questão 30:
[B]



Volume do prisma 1: $\frac{6 \cdot a^2\sqrt{3} \cdot h}{4}$

Volume do prisma 2: $\frac{6 \cdot (a+2)^2\sqrt{3} \cdot h}{4}$

Aumento do volume: $V_2 - V_1 = 6\sqrt{3} \cdot (a+1) \cdot h = 108 \qquad \text{(I)}$

$$\frac{a}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = a\sqrt{3} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$6\sqrt{3} \cdot (a+1) \cdot a\sqrt{3} = 108$$
$$18(a^2 + a) = 108$$
$$a^2 + a = 6$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos a = – 3 (não convém) ou a = 2.

$a = 2\text{cm} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}\text{cm},$ portanto, o volume do prisma 1 será dado por:

$$V_1 = \frac{6 \cdot a^2\sqrt{3} \cdot h}{4} = \frac{6 \cdot 2^2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{4} = 36\text{cm}^3$$

Resposta da questão 31:
[E]

Observando que as cotas dos pontos A, B, C e D são iguais, podemos concluir que o quadrilátero $ABCD$ está contido no plano $z = 5.$ Logo, se O é o centro de $ABCD,$ tem-se que VO é paralelo ao eixo $z.$ Além disso, é fácil ver que $ABCD$ é um quadrado de lado $2.$ Desse modo, sabendo que o volume de $VABCD$ é igual a $8,$ obtemos

$$8 = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \overline{VO} \Leftrightarrow \overline{VO} = 6.$$

Portanto, como

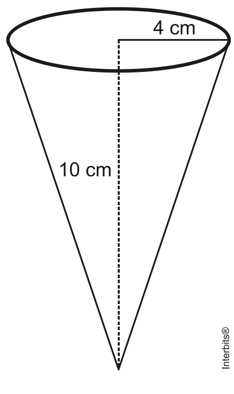
$$O = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{5+5}{2} \right) = (4, 3, 5),$$

segue-se que $V = (4, 3, 5+6) = (4, 3, 11)$ ou $V = (4, 3, 5-6) = (4, 3, -1).$

Porém, sabendo que V tem as três coordenadas positivas, só pode ser $V = (4, 3, 11).$

Resposta da questão 32:
[D]

O volume do cone (recheio) será dado por:



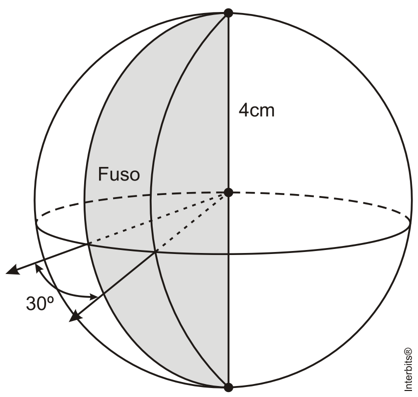
Tomando $\pi = 3,$ o volume do cone será dado por:

$$v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = 160\,\text{cm}^3$$

Considerando que o peixe representa 90% do volume do recheio, temos: $0{,}9 \cdot 160 = 144\,\text{cm}^3$ (volume do salmão).

Portanto, a massa do salmão será dada por $0{,}35 \cdot 144 = 50{,}4\,\text{g}.$ Logo, a alternativa correta é a [D].

Resposta da questão 33:
[A]



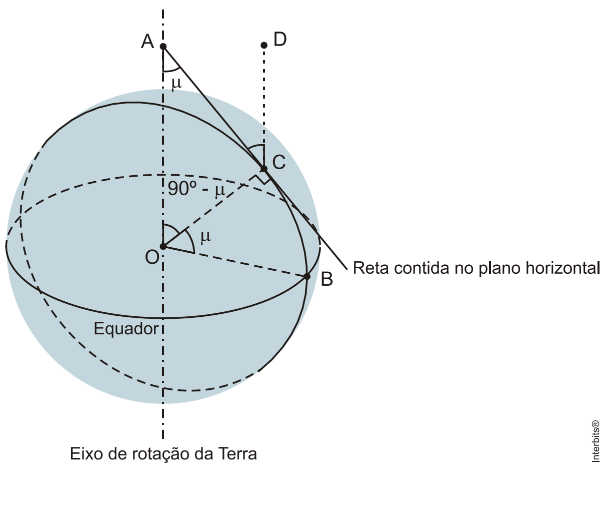
360° : 12° = 30°

A área total de cada gomo é a soma das áreas de um fuso esférico como as áreas de dois semicírculos.

$$A = \frac{30° \cdot 4\pi \cdot 4^2}{360°} + 2 \cdot \frac{\pi \cdot 4^2}{2}$$
$$A = \frac{16\pi}{3} + 16\pi$$
$$A = \frac{64\pi}{3} = \frac{4^3\pi}{3} cm^2.$$

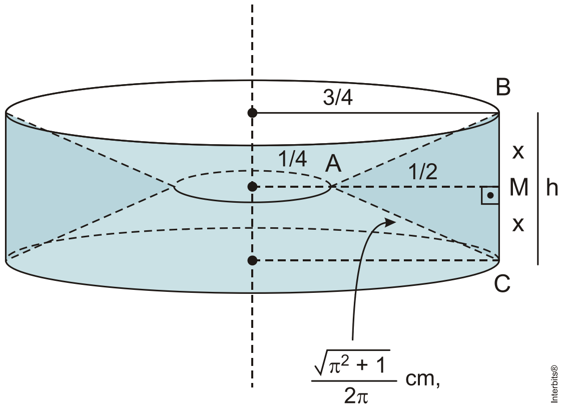
Resposta da questão 34:
[B]

Considere a figura, em que O é o centro da Terra, $BOC = \mu$ é a latitude do ponto C e CD é a linha inclinada do relógio solar.



Como $AOB \equiv ACO = 90°$, segue-se que $AOC = 90° - \mu$ e, portanto, $OAC = \mu$. Agora, sabendo que $CD \parallel OA$, tem-se $ACD = \mu$, que é o resultado pedido.

Resposta da questão 35:
[C]



No triângulo AMC, temos:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\pi^2 + 1}}{2\pi}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2\pi} \text{ e } h = \frac{1}{\pi}$$

Volume do cilindro: $V_C = \pi\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{9}{16} cm^3$

Volume de cada tronco de cone:
$$V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \cdot \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^3\right) = \frac{13}{96} cm^3$$

Portanto, o volume pedido será dado por:
$$V = V_C - 2 \cdot V_T = \frac{9}{16} - 2 \cdot \frac{13}{96} = \frac{14}{48} = \frac{7}{24} cm^3$$

Resposta da questão 36:
[E]

Tem-se que

$$AOB = 360° - \theta = 360° - 225° = 135° = \frac{3\pi}{4} rad.$$

Logo,

$$AB = AOB \cdot \overline{AO} = \frac{3\pi}{4} \cdot 16 = 12\pi cm$$
e
$$CD = AOB \cdot \overline{OC} = \frac{3\pi}{4} \cdot 1 = \frac{3\pi}{4} cm.$$

Daí, se R é o raio maior do funil e r é o raio menor do funil, então

$$2\pi R = 12\pi \Leftrightarrow R = 6 cm$$
e
$$2\pi r = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow r = \frac{3}{8} cm.$$

Portanto, sendo h a altura do funil e $\overline{AC} = \overline{OA} - \overline{OC} = 15 cm$ a sua geratriz, pelo Teorema de Pitágoras, vem

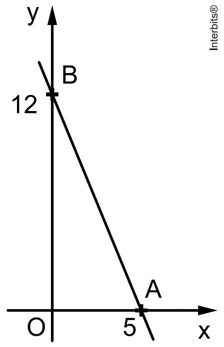
$$h^2 = 15^2 - \left(6 - \frac{3}{8}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = 225 - \frac{2025}{64}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{22375}{64}}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{15\sqrt{55}}{8}\text{cm}.$$

Resposta da questão 37:
[B]

Fazendo $y = 0$ na equação $12x + 5y = 60$, obtemos o ponto $A = (5, 0)$, que é o ponto de interseção da reta com o eixo das abscissas. Tomando $x = 0$, encontramos o ponto $B = (0, 12)$, que é o ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas.



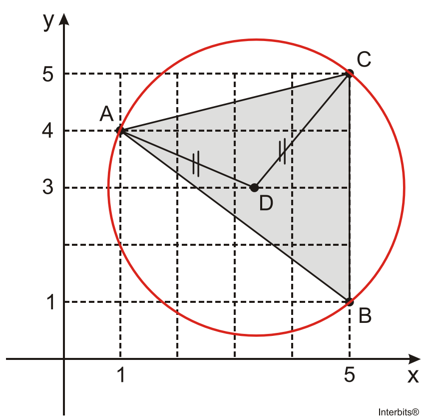
Desse modo, sendo O a origem do sistema de eixos cartesianos, queremos calcular o raio r da circunferência inscrita no triângulo AOB.

Pelo Teorema de Pitágoras, encontramos $\overline{AB} = 13$. Logo, temos

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB}}{2} \cdot r \Leftrightarrow 5 \cdot 12 = (5 + 12 + 13) \cdot r$$

$$\Leftrightarrow r = 2.$$

Resposta da questão 38:
[D]



O ponto D pertence à mediatriz do segmento BC, logo D é (K,3).

Considerando que D é equidistante dos pontos A e B, temos:

$$(AD)^2 = (BD)^2$$

$$(K-1)^2 + (3-4)^2 = (K-5)^2 + (3-5)^2$$

$$K^2 - 2 \cdot K + 1 + 1 = K^2 - 10K + 25 + 4$$

$$8K = 27$$

$$K = \frac{27}{8}$$

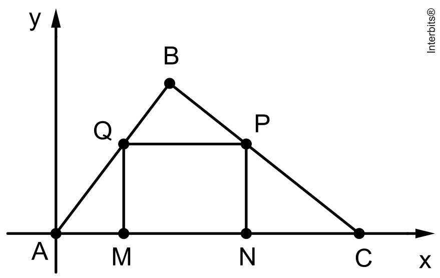
Portanto, $D\left(\frac{27}{8}, 3\right)$.

Logo, a medida do raio r será dada por:

$$R = AD = \sqrt{\left(\frac{27}{8} - 1\right)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{\frac{425}{64}} = \frac{5\sqrt{17}}{8}.$$

Resposta da questão 39:
[D]

Considere a figura.



A equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é dada por

$$y = \frac{y_B}{x_B}x \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x.$$

Logo, tem-se $Q = \left(\frac{3y}{4}, y\right)$ e $M = \left(\frac{3y}{4}, 0\right)$, com $0 < y < 4$.

Além disso, a equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é

$$y - y_C = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}(x - x_C) \Leftrightarrow y - 0 = \frac{4-0}{3-8}(x-8)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{32}{5}.$$

Daí, $P = \left(\frac{32-5y}{4}, y\right)$ e $N = \left(\frac{32-5y}{4}, 0\right)$, com $0 < y < 4$.

A área do retângulo $MNPQ$ é dada por

$$\begin{aligned}(MNPQ) &= \overline{MN} \cdot \overline{PN} \\ &= \left(\frac{32-5y}{4} - \frac{3y}{4}\right) \cdot (y-0) \\ &= -2y^2 + 8y \\ &= -2 \cdot [(y-2)^2 - 4)] \\ &= 8 - 2 \cdot (y-2)^2.\end{aligned}$$

Portanto, o retângulo $MNPQ$ tem área máxima quando $y = 2,$ ou seja, quando $P = \left(\frac{11}{2}, 2\right).$

Resposta da questão 40:
[C]

Seja M o ponto médio do segmento de reta $AB.$

Se $d_{A,r} = d_{B,r} = d,$ então M pertence à reta $r.$ Logo,

$$M = \left(\frac{8+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 4\right)$$

e, portanto, a equação de r é

$$y - 4 = \operatorname{tg}45° \cdot \left(x - \frac{11}{2}\right) \Leftrightarrow y = x - \frac{3}{2}.$$

Em consequência, tomando $y = 0,$ segue-se que $C = \left(\frac{3}{2}, 0\right).$

Resposta da questão 41:
[A]

Adotando, convenientemente, um sistema de coordenadas cartesianas, com origem no vértice inferior esquerdo do quadrado $O1,$ tem-se $B2 = (1{,}5; 13{,}5),$ $B14 = (13{,}5; 13{,}5)$ e $M3 = (2{,}5; 2{,}5).$

Queremos determinar o circuncentro do triângulo $B2B14M3.$

A mediatriz do segmento $B2B14$ é a reta

$$x = \frac{1{,}5 + 13{,}5}{2} \Leftrightarrow x = 7{,}5.$$

A reta $\overleftrightarrow{B2M3}$ tem coeficiente angular igual a $\frac{13{,}5 - 2{,}5}{1{,}5 - 2{,}5} = -11.$

O ponto médio do segmento $B2M3$ é

$$\left(\frac{2{,}5 + 1{,}5}{2}, \frac{2{,}5 + 13{,}5}{2}\right) = (2, 8).$$

Logo, a equação da mediatriz do segmento $B2M3$ é dada por

$$y - 8 = \frac{1}{11}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{11}x + \frac{86}{11}.$$

Daí, a ordenada do circuncentro é

$$y = \frac{1}{11} \cdot 7{,}5 + \frac{86}{11} = \frac{93{,}5}{11} = 8{,}5.$$

Portanto, como o ponto $(7{,}5; 8{,}5)$ corresponde ao centro do quadrado $G8,$ segue-se o resultado.

Resposta da questão 42:
[D]

O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AC}$ é igual a $m_{\overleftrightarrow{AC}} = \frac{4 - (-2)}{-1 - 3} = -\frac{3}{2}.$ Daí, como $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são perpendiculares, segue-se que $m_{\overleftrightarrow{AC}} \cdot m_{\overleftrightarrow{BD}} = -1 \Leftrightarrow m_{\overleftrightarrow{BD}} = \frac{2}{3},$ com $m_{\overleftrightarrow{BD}}$ sendo o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{BD}.$

Além disso, se M é o ponto médio de $AC,$ temos $M = \left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{-2 + 4}{2}\right) = (1, 1).$

Sabendo que M é o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD},$ concluímos que a equação de $\overleftrightarrow{BD}$ é

$$y - 1 = \frac{2}{3} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Portanto, segue de imediato que a ordenada do ponto de interseção de $\overleftrightarrow{BD}$ com o eixo Oy é igual a $\frac{1}{3}.$

Resposta da questão 43:
[B]

Determinando o centro C da circunferência dada:

$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = 25 + 4 + 25$

$(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 4$

Logo, o centro é C(–2,–5).

O ponto P simétrico do ponto (–1,1) em relação ao eixo x é P (–1, –1).

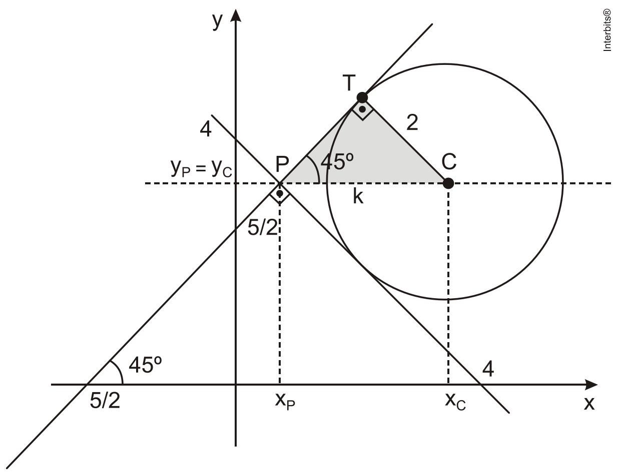
Portanto, o raio R da circunferência pedida será a distância entre os pontos P e C. Temos,

$R^2 = (-1 - (-2))^2 + (-1 - (-5))^2 = 17$

Logo, a equação da circunferência pedida será dada por :

$(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 17 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 10y + 29 - 17 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 10y + 12 = 0$

Resposta da questão 44:
[D]



As retas são perpendiculares, pois

$$m_r \cdot m_s = 1 \cdot (-1) = -1.$$

Considerando o ponto C centro da circunferência de raio 2, pois sua área é 4π.
A reta PC é paralela ao eixo x, logo:

$$y_P = y_C \ \text{ e } \ x_C = x_P + k$$

Para determinar as coordenadas do ponto P basta resolver o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 5 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Portanto, $P\left(\frac{3}{4}, \frac{13}{4}\right)$

Determinando o valor de k no triângulo assinalado, temos:

$$\text{sen } 45° = \frac{2}{k} \Rightarrow k = 2\sqrt{2}$$

Portanto, $x_C = \frac{3}{4} + 2\sqrt{2}$ e $y_C = \frac{13}{4}.$

Logo, a equação da circunferência será dada por:

$$\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 = 4.$$

Resposta da questão 45:
[A]

Completando os quadrados, vem

$$x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

e

$$x^2 + y^2 - 2x - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Logo, $C_1 = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $r_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ e $r_2 = \frac{3}{2}.$

O resultado pedido corresponde à distância entre os centros das circunferências subtraída da soma dos raios, ou seja,

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-(-1))^2 + \left(\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) &= 2\sqrt{2} - 2 \\ &= 2(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Resposta da questão 46:
[A]

Tem-se que $x_{p_I} = \frac{4 \cdot 20 + 6 \cdot 23}{4 + 6} = 21{,}8$ e $x_{p_{III}} = \frac{4 \cdot 21 + 6 \cdot 18}{4 + 6} = 19{,}2.$

Logo, deve-se ter

$$x_{p_{II}} > 21{,}8 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot x + 6 \cdot 25}{4 + 6} > 21{,}8 \Leftrightarrow 4x > 218 - 150 \Leftrightarrow x > 17.$$

Portanto, a menor nota que o candidato [II] deverá obter na prova de química é $18.$

Resposta da questão 47:
[E]

Seja $(AEF) = 2S.$ Pela simetria da figura, temos $(EBDF) = (BDHG) = S.$ Além disso, os triângulos AEF e ABD são semelhantes por $AA.$

Portanto, como

$$(ABD) = (AEF) + (EBDF) = 3S,$$

tem-se

$$\begin{aligned} \frac{(AEF)}{(ABD)} = \left(\frac{x}{b}\right)^2 &\Leftrightarrow \frac{2S}{3S} = \left(\frac{x}{b}\right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \end{aligned}$$

que é o resultado pedido.

Resposta da questão 48:
[A]

[I] Verdadeira. Sabendo que a área do triângulo ABC mede $48\,\text{cm}^2$ e que $\overline{AP} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BC}$, vem

$$\begin{aligned} (ABC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AP} &\Leftrightarrow 48 = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \frac{2}{3} \cdot \overline{BC} \\ &\Leftrightarrow \overline{BC} = 3^2 \cdot 4^2 \\ &\Rightarrow \overline{BC} = 12\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\overline{AP} = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8\,\text{cm}.$$

Como P é ponto médio de BC, é imediato, pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo APC, que $\overline{AB} = \overline{AC} = 10\,\text{cm}.$

Portanto, sendo M o pé da mediana relativa ao lado AC, tem-se

$$\begin{aligned} \overline{BM} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) - \overline{AC}^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (10^2 + 12^2) - 10^2} \\ &= \sqrt{122 - 25} \\ &= \sqrt{97}\,\text{cm}. \end{aligned}$$

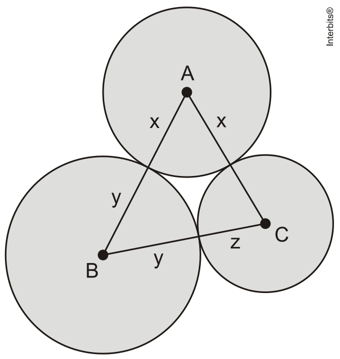
[II] Falsa. De fato, sendo G o baricentro do triângulo ABC, temos

$$\overline{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AP} = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8\,\text{cm}.$$

[III] Falsa. Sabendo que $\overline{BM} = \sqrt{97}\,\text{cm},$ vem $\overline{BG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BM} = \frac{2\sqrt{97}}{3}\,\text{cm}.$ Assim, do triângulo $BGP,$ obtemos

$$\cos\alpha = \frac{\overline{BP}}{\overline{BG}} = \frac{6}{\frac{2\sqrt{97}}{3}} = \frac{9}{\sqrt{97}}.$$

Resposta da questão 49:
[D]



Admitindo x, y e z os raios das circunferências de centros A,B e C , respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ y + z = 8 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:
$x = 3/2,\ y = 11/2$ e $z = 5/2.$

Calculando, agora, a soma das áreas de todos os círculos, temos:

$$A = \pi \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{195\pi}{4}\text{km}^2.$$

Resposta da questão 50:
[D]

Sendo $ABCD$ um paralelogramo, é imediato que $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $\overline{AB} = \overline{CD}.$

Como a área de $ABCD$ vale $24\,\text{cm}^2,$ tem-se

$$(ABCD) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \operatorname{sen} A\hat{D}C \Leftrightarrow \overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \operatorname{sen} A\hat{D}C = 24.$$

Além disso, sabemos que $A\hat{D}C \equiv A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D = 180° - A\hat{D}C.$ Por conseguinte, o resultado pedido é dado por

$$\begin{aligned}(AMND) &= (ABCD) - (ABM) - (MCN) \\ &= 24 - \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BM} \cdot \operatorname{sen} A\hat{B}C - \frac{1}{2} \cdot \overline{CM} \cdot \overline{CN} \cdot \operatorname{sen} B\hat{C}D \\ &= 24 - \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \frac{\overline{AD}}{2} \cdot \operatorname{sen} A\hat{D}C - \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{AD}}{2} \cdot \frac{\overline{CD}}{2} \cdot \operatorname{sen}(180° - A\hat{D}C) \\ &= 24 - \frac{1}{4} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \operatorname{sen} A\hat{D}C - \frac{1}{8} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \operatorname{sen} A\hat{D}C \\ &= 24 - 6 - 3 \\ &= 15\,\text{cm}^2.\end{aligned}$$

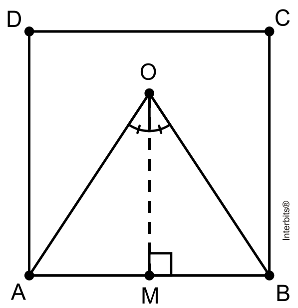
Resposta da questão 51:
[C]

Sabendo que o ângulo interno de um octógono regular mede $135°,$ segue-se que os quatro triângulos, resultantes da decomposição do octógono, são retângulos isósceles de catetos iguais a $\frac{a\sqrt{2}}{2}.$ Logo, como a área do quadrado destacado no centro do octógono é $S = a^2,$ tem-se que o resultado pedido é

$$\begin{aligned}4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} + a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + S &= a^2 + 2\sqrt{2}a^2 + S \\ &= 2S\sqrt{2} + 2S \\ &= 2S(\sqrt{2} + 1).\end{aligned}$$

Resposta da questão 52:
[E]

Considere a figura, em que M é o ponto médio do lado $AB.$



Do triângulo retângulo $OMB,$ obtemos

$$\operatorname{tg} M\hat{O}B = \frac{\overline{BM}}{\overline{MO}} \Leftrightarrow \overline{MO} = \frac{\overline{AB}}{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\overline{AB} = 1.$ Assim,

$$(AOB) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{MO}}{2} = \frac{1}{4\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}.$$

A área do quadrado $ABCD$ é maior do que a área do triângulo AOB se

$$(ABCD) > (AOB) \Rightarrow 1^2 > \frac{1}{4\,tg\frac{\theta}{2}}$$
$$\Rightarrow tg\frac{\theta}{2} > \frac{1}{4} = 0,25.$$

Logo, como $tg15° \cong 0,2679 > 0,25$ e $0° < \theta < 180°$, vem que $30° < \theta < 180°$. Note que $]30°, 150°[\subset]30°, 180°[$.

Resposta da questão 53:
[A]

A área do retângulo, após os acréscimos no comprimento e na largura, é dada por

$$X\left(1+\frac{Y}{100}\right)\cdot Y\left(1+\frac{X}{100}\right).$$

Logo, o resultado pedido é

$$\frac{X\left(1+\frac{Y}{100}\right)\cdot Y\left(1+\frac{X}{100}\right)-X\cdot Y}{X\cdot Y}\cdot 100\% = \left(1+\frac{X}{100}+\frac{Y}{100}+\frac{XY}{10000}-1\right)\cdot 100\%$$
$$= \left(X+Y+\frac{XY}{100}\right)\%.$$

Resposta da questão 54:
[C]

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 as idades dos cinco jogadores titulares do time, com $11 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$.

Sabendo que a média das idades é 13 anos e que o mais velho tem 17 anos, obtemos

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+17}{5} = 13 \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3+x_4 = 48.$$

Portanto, se $x_1 = x_2 = x_3 = 11$, então o segundo jogador mais velho do time terá exatamente

$$11+11+11+x_4 = 48 \Leftrightarrow x_4 = 15$$

anos, sendo, portanto, a máxima idade que ele pode ter.

Resposta da questão 55:
[B]

A média do Reagente 1 é igual a $\bar{x}_1 = \dfrac{1+6+6+6+11}{5} = 6.$

A média do Reagente 2 é igual a $\bar{x}_2 = \dfrac{0+6+7+6+5}{5} = 4,8.$

A média do Reagente 3 é igual a $\bar{x}_3 = \dfrac{2+3+8+10+11}{5} = 6,8.$

A média do Reagente 4 é igual a $\bar{x}_4 = \dfrac{2+4+7+8+12}{5} = 6,6.$

A média do Reagente 5 é igual a $\bar{x}_5 = \dfrac{1+2+9+10+11}{5} = 6,6.$

Portanto, como o Reagente 2 apresentou quatro resultados acima de sua média, segue o resultado.

Resposta da questão 56:
[D]

A região disponível para reproduzir a gravura corresponde a um retângulo de dimensões $42-2\cdot 3 = 36\,cm$ e $30-2\cdot 3 = 24\,cm.$ Daí, como $\dfrac{24}{600} = \dfrac{1}{25}$ e $\dfrac{36}{800} > \dfrac{32}{800} = \dfrac{1}{25},$ segue-se que a escala pedida é $1:25.$

Resposta da questão 57:
[A]

$$\frac{53}{100}\cdot(23900000+90000000+20600000) = 69940000$$

Aproximadamente 70 milhões de mulheres com 18 anos ou mais.

Resposta da questão 58:
[C]

O valor total da conta de energia elétrica para o consumo de $150\,kWh$ é igual a $0,5\cdot 150+4,5 = R\$\,79,50.$ Assim, reduzindo em 10% o valor da conta, ele pagará $0,9\cdot 79,5 = R\$\,71,55.$

Seja x o número máximo de kWh que deverão ser consumidos para que o objetivo do morador seja alcançado. Observando que $100 < x < 140,$ temos $0,5\cdot x+3 = 71,55 \Leftrightarrow x = 137,1\,kWh.$

Resposta da questão 59:
[E]

Seja T o total de eleitores. Sabendo que o candidato A recebeu $0,6\cdot T$ votos, o candidato B recebeu $0,35\cdot T$ votos e 620 pessoas votaram em branco ou anularam o voto, vem

$$[1-(0,6+0,35)]\cdot T = 620 \Leftrightarrow T = \frac{620}{0,05}$$
$$\Leftrightarrow T = 12400.$$

Portanto, o resultado pedido é igual a

$$[0,7\cdot 0,6+(1-0,6)\cdot 0,35]\cdot 12400 = 0,56\cdot 12400$$
$$= 6944.$$

Resposta da questão 60:
[A]

Sabendo que média da distribuição de zeros e uns é igual a $0,45 < 0,50,$ podemos concluir que existem mais sapatos na cor branca do que na cor preta. Além disso, como a Moda da numeração dos sapatos com defeito é $38,$ segue que os sapatos na cor branca de número 38 não serão mais encomendados.

Resposta da questão 61:
[A]

Considerando P o número estimado de pessoas na foto, temos:

$$P = 500 \cdot (1,5 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 1,5 \cdot 3)$$
$$P = 500 \cdot (3 + 8 + 15 + 8 + 4,5)$$
$$P = 500 \cdot 38,5 = 19250.$$

Resposta da questão 62:
[B]

Em 2013 a empresa gastou $0,125 \cdot 400000 = \text{R\$ } 50.000,00$ com os funcionários que possuíam ensino fundamental, e o mesmo valor com os que tinham nível superior. Já com os funcionários que tinham ensino médio, a despesa foi de $0,75 \cdot 400000 = \text{R\$ } 300.000,00.$

Portanto, a fim de manter o lucro, a empresa deve aumentar a receita em
$$\frac{70-50}{50} \cdot 50000 + \frac{180-150}{150} \cdot 60000 + 50000 = 20000 + 60000 + 50000 = \text{R\$ } 130.000,00.$$

Resposta da questão 63:
[C]

A probabilidade de que o segundo jogador ganhe na primeira tentativa, isto é, ao virar a primeira carta, é igual a $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$ Assim, como a probabilidade dele ganhar ao virar a segunda carta é $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$ tem-se que a probabilidade dele formar um par usando a estratégia descrita é igual a $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$