Lista 02 – Matemática - Vários

1. (Ita 2013) Seja $n > 6$ um inteiro positivo não divisível por 6. Se, na divisão de n^2 por 6, o quociente é um número ímpar, então o resto da divisão de n por 6 é

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

2. (Ufsj 2012) Assinale a alternativa que indica quantos são os números inteiros de 1 a 21.000, que **NÃO** são divisíveis por 2, por 3 e nem por 5.

a) 6.300 b) 5.600 c) 7.000 d) 700

3. (Ime 2012) Um curso oferece as disciplinas A, B, C e D. Foram feitas as matriculas dos alunos da seguinte forma:

— 6 alunos se matricularam na disciplina A;
— 5 alunos se matricularam na disciplina B;
— 5 alunos se matricularam na disciplina C; e
— 4 alunos se matricularam na disciplina D.

Sabe-se que cada aluno se matriculou em, no mínimo, 3 disciplinas. Determine a quantidade mínima de alunos que se matricularam nas 4 disciplinas.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

4. (Fgv 2012) As duas raízes da equação $x^2 + 63x + k = 0$ na incógnita *x* são números inteiros e primos. O total de valores distintos que *k* pode assumir é

a) 4. b) 3. c) 2. d) 1. e) 0.

5. (Fgv 2012) Uma indústria química produz dois produtos A e B em quantidades diárias *x* e *y* respectivamente. As quantidades *x* e *y* expressas em toneladas relacionam-se pela equação $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{100} = 1.$ A máxima quantidade do produto A que a empresa consegue produzir diariamente é:

a) 5 toneladas b) 10 toneladas c) 15 toneladas
d) 20 toneladas e) 25 toneladas

6. (Ime 2012) Seja F o conjunto cujos elementos são os valores de n!, onde n é um número natural. Se G é subconjunto de F que **não contém** elementos que são múltiplos de 27.209, determine o número de elementos do conjunto G.

a) 6 b) 12 c) 15 d) 22 e) 25

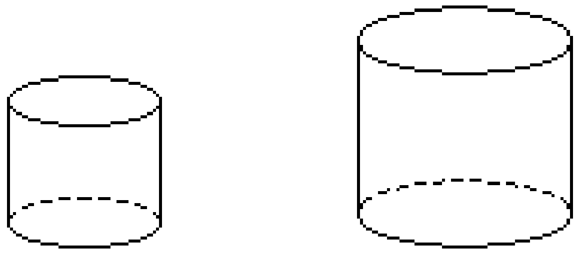
7. (Fgv 2010) Na equação $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-k}{x-6}$, na variável x, k é um parâmetro real. O produto dos valores de k para os quais essa equação não apresenta solução real em x é
a) 10. b) 12. c) 20. d) 24. e) 30.

8. (Ufpr 2010) João viaja semanalmente de ônibus e a esposa costuma ir de automóvel a seu encontro na estação rodoviária de Matinhos, onde ele chega pontualmente, e ambos se encontram exatamente às 18h. Um dia, João chega às 17h30min e resolve andar em direção a sua casa pelo caminho que costuma seguir com a sua mulher, mas sem avisá-la. Encontram-se no caminho, ele sobe no carro e os dois voltam para casa, chegando 10min antes do horário de costume. Supondo que sua esposa viajou com velocidade constante e que saiu de casa no tempo exato para encontrar o marido às 18h na estação rodoviária, assinale a alternativa que apresenta o tempo, em minutos, que João andou antes de encontrar-se com ela.

a) 10. b) 20. c) 30. d) 25. e) 15.

9. (Ime 2010) A quantidade k de números naturais positivos, menores do que 1000, que não são divisíveis por 6 ou 8, satisfaz a condição:
a) $k < 720$ b) $720 \le k < 750$ c) $750 \le k < 780$
d) $780 \le k < 810$ e) $k \ge 810$

10. (Fuvest 2007) Uma empresa de construção dispõe de 117 blocos de tipo X e 145 blocos de tipo Y. Esses blocos têm as seguintes características: todos são cilindros retos, o bloco X tem 120 cm de altura e o bloco Y tem 150 cm de altura.



tipo X tipo Y

A empresa foi contratada para edificar colunas, sob as seguintes condições: cada coluna deve ser construída sobrepondo blocos de um mesmo tipo e todas elas devem ter a mesma altura. Com o material disponível, o número máximo de colunas que podem ser construídas é de

a) 55 b) 56 c) 57 d) 58 e) 59

11. (Uerj 2015) Na tabela abaixo, estão indicadas três possibilidades de arrumar *n* cadernos em pacotes:

Nº de pacotes	**Nº de cadernos por pacotes**	**Nº de cadernos que sobram**
X	12	11
Y	20	19
Z	18	17

Se *n* é menor do que 1200, a soma dos algarismos do maior valor de *n* é:

a) 12 b) 17 c) 21 d) 26

12. (Fuvest 2015) Na cidade de São Paulo, as tarifas de transporte urbano podem ser pagas usando o bilhete único. A tarifa é de $\text{R\$ }3{,}00$ para uma viagem simples (ônibus ou metrô/trem) e de $\text{R\$ }4{,}65$ para uma viagem de integração (ônibus e metrô/trem). Um usuário vai recarregar seu bilhete único, que está com um saldo de $\text{R\$ }12{,}50.$ O menor valor de recarga para o qual seria possível zerar o saldo do bilhete após algumas utilizações é
a) $\text{R\$ }0{,}85$ b) $\text{R\$ }1{,}15$ c) $\text{R\$ }1{,}45$ d) $\text{R\$ }2{,}50$ e) $\text{R\$ }2{,}80$

13. (Uece 2014) No triângulo OYZ, os lados OY e OZ têm medidas iguais. Se W é um ponto do lado OZ tal que os segmentos YW, WO e YZ têm a mesma medida, então, a medida do ângulo YÔZ é

a) 46°. b) 42°. c) 36°. d) 30°.

14. (Uneb 2014)

O Sistema Monetário Colonial do Brasil mantinha uma clássica ordem de valores baseados nas dezenas, com seus valores dobrados a cada nível acima de moeda cunhada, portanto com valores de 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640 e 960 réis; o que em grande parte minimizava a problemática do troco. No entanto, a província de Minas Gerais produziu um problema tão grave de troco, no início da segunda década do século XIX, que afetou diretamente os interesses da metrópole e exigiu medidas drásticas para evitar grandes perdas ao cofre português. [...]
Para resolver o problema, em 1818, a Casa da Moeda do Rio de Janeiro, desativada desde 1734, foi reaberta para cunhar uma das moedas mais intrigantes da história da numismática mundial, o Vintém de Ouro. O nome sugere uma moeda de vinte réis cunhada em ouro, no entanto é uma moeda de cobre que tem no seu anverso o valor de 37 ½ réis, batida no Rio de Janeiro para circular em Minas Gerais.

(O SISTEMA. 2013).

De acordo com o texto, se uma pessoa tivesse que efetuar um pagamento de 680 réis e só possuísse moedas de Vintém de Ouro, então, ao realizar esse pagamento, ele poderia receber de troco uma quantidade mínima de moedas, correspondente a uma moeda de
a) 40 réis.
b) 80 réis.
c) 10 e outra de 20 réis.
d) 10 e outra de 40 réis.
e) 10, uma de 20 e uma de 40 réis.

15. (Ufg 2014) Uma pessoa fez uma compra em um supermercado no valor de R$ 77,00. Ao efetuar o pagamento com uma nota de R$ 100,00, o operador de caixa informou-lhe que dispunha apenas de notas de R$ 10,00 para o troco. O cliente verificou que ainda tinha em sua carteira R$ 73,00, sendo três notas de R$ 10,00, oito notas de R$ 5,00 e três moedas de R$ 1,00.
O menor valor que o cliente deve repassar ao operador de caixa, para facilitar o troco, considerando-se o dinheiro que tinha em sua carteira, é:
a) R$ 103,00
b) R$ 107,00
c) R$ 113,00
d) R$ 117,00
e) R$ 123,00

LISTA 02 – MATEMÁTICA
CARNAVAL FELIZ
13/02

Gabarito:

Resposta da questão 1:
[C]

Todo número inteiro positivo n que não é múltiplo de 6 poderá ser escrito utilizando uma das formas abaixo:

$n = 6k + 1 \Rightarrow n^2 = 6.(6K^2 + 2K) + 1$

$n = 6k + 2 \Rightarrow n^2 = 6.(6K^2 + 4K) + 4$

$\underline{n = 6k + 3} \Rightarrow \underline{n^2 = 6.(\mathbf{6K^2 + 6K + 1}) + 3}$

$n = 6k + 4 \Rightarrow n^2 = 6.(6K^2 + 12K + 2) + 4$

$n = 6k + 5 \Rightarrow n^2 = 6.(6K^2 + 10K + 4) + 1$

Dos números acima, os únicos cujos quadrados terão quociente ímpar quando divididos por 6 são os da forma 6k + 3; logo, o resto da divisão de n por 6 será 3.

Resposta da questão 2:
[B]

Sejam A o conjunto dos múltiplos de $2,$ B o conjunto dos múltiplos de 3 e C o conjunto dos múltiplos de $5.$ Queremos calcular o número de elementos do conjunto $\overline{A \cup B \cup C}.$
Sabendo que $A \cap B$ é o conjunto dos múltiplos de $6,$ $A \cap C$ é o conjunto dos múltiplos de $5,$ $B \cap C$ é o conjunto dos múltiplos de 15 e $A \cap B \cap C$ é o conjunto dos múltiplos de $30,$ vem

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + \\ &\quad + n(A \cup B \cup C) \\ &= \frac{21000}{2} + \frac{21000}{3} + \frac{21000}{5} - \frac{21000}{6} - \frac{21000}{10} - \frac{21000}{15} + \\ &\quad + \frac{21000}{30} \\ &= 15400. \end{aligned}$$

Portanto, segue que o resultado pedido é dado por

$$n(\overline{A \cup B \cup C}) = 21000 - 15400 = 5.600.$$

Resposta da questão 3:
[C]

$n =$ número de alunos
x é o número de alunos que se matricularam em 4 disciplinas
$n - x$ é o número de alunos que se matricularam em 3 disciplinas (cada aluno foi matriculado em 3 disciplinas no mínimo)

$4x + 3 \cdot (n - x) = 20$ (total de matrículas)
Logo, $x = 20 - 3n$.

Sabemos que 6 alunos estão em A, ou seja, 6 é o número mínimo de alunos.
Logo, $x = 20 - 3 \cdot 6 = 2$.

Resposta da questão 4:
[D]

Pelas Relações de Girard, a soma das raízes da equação é igual a 63 e o produto é igual a *k*. Além disso, como as raízes são números primos e a soma é ímpar, segue que uma das raízes é 2 e, portanto, a outra é $63 - 2 = 61.$ Logo, *k* só pode ser igual a $2 \cdot 61 = 122.$

Resposta da questão 5:
[D]

A máxima quantidade do produto **A** ocorre quando y = 0.

Temos, então, a seguinte equação:

$$\frac{x^2}{400} = 1 \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = \pm 20$$

Como $x \geq 0,$ então x = 20.

Resposta da questão 6:
Questão anulada no gabarito oficial.

$27209 = 7 \cdot 13^2 \cdot 23$, assim $n!$ não pode ter o fator 13^2 para fazer parte de G.
$n!$ deve ser menor que $26!$, que possui o fator 13^2.

Portanto, $G = \{0!, 1!, 2!, 3!, 4!, 5! \ldots 22!, 23!, 24!, 25!\}$.
Ou seja, 26 elementos.

Questão não possui resposta correta.

Resposta da questão 7:
[E]

x deve ser diferente de 2 e de 6

$x^2 – 6x – x – 6 = x^2 – xk - 2x + 2k$

$x(k – 5) = 2k – 6$

x = $\frac{2k-6}{k-5} = 2 + \frac{4}{k-5}$ (k diferente de 5)
Observando o resultado, notamos que x será sempre diferente de 2, pois $\frac{4}{k-5}$ será sempre diferente de zero.
Se x = 6, termos k = 6.
Logo, o produto dos valores de k pedido é 5.6 = 30

Resposta da questão 8:
[D]

X = tempo que João andou.
2.(30 – x) = 10
30 – x = 5
x = 25 min.

Resposta da questão 9:
[C]

(1, 2, 3, 4, ..., 998, 999)

Divisíveis por 6: ($6\cdot1$, $6\cdot2$, $6\cdot3$, ..., $6\cdot166$). Total: 166.
Divisíveis por 8: ($8\cdot1$, $8\cdot2$, $8\cdot3$, ..., $8\cdot124$). Total: 124.
Divisíveis por 6 e 8: ($24\cdot1$, $24\cdot2$, $24\cdot3$, ..., $24\cdot41$). Total: 41.
Divisíveis por 6 ou 8: 166 + 124 – 41 = 249.
Números inteiros positivos, menores que 1000, que não são divisíveis por 6 ou por 8: 999 – 249 = 750.

Resposta da questão 10:
[E]

Resposta da questão 11:
[B]

De acordo com a tabela, temos:

$$n = 12x + 11 \Rightarrow n + 1 = 12(x+1)$$
$$n = 20y + 19 \Rightarrow n + 1 = 20(x+1)$$
$$n = 18z + 17 \Rightarrow n + 1 = 18(x+1)$$

$$\text{mmc}(12,20,18) = 180$$

Concluímos então que, n + 1 é o maior múltiplo de 180 que é menor que 1200.
Portanto, $n+1=1080 \Rightarrow n = 1079.$
A soma dos algarismos de *n* será dada por: 1 + 0 + 7 + 9 = 17.

Resposta da questão 12:
[B]

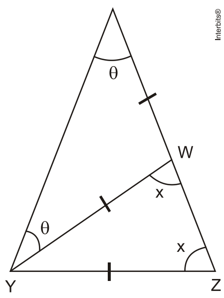
Sejam $t,$ m e $n,$ respectivamente, o total gasto, o número de viagens simples e o número de viagens de integração. Logo, devemos calcular o valor mínimo de t que satisfaça $t = 3\cdot m + 4{,}65\cdot n$ e $t > 12{,}5.$

Observando que $4{,}65\cdot 3 > 12{,}5,$ basta tomarmos $n \le 3$ e um valor conveniente de m para obtermos o resultado desejado. Com efeito, vejamos:

1. se $n = 3$ e $m = 0,$ temos $t = 3\cdot 4{,}65 = 13{,}95;$
2. se $n = 2$ e $m = 2,$ temos $t = 3\cdot 2 + 4{,}65\cdot 2 = 15{,}30;$
3. se $n = 1$ e $m = 3,$ temos $t = 3\cdot 3 + 4{,}65\cdot 1 = 13{,}65;$
4. se $n = 0$ e $m = 5,$ temos $t = 3\cdot 5 = 15{,}00.$

Portanto, segue que o menor valor de recarga para o qual seria possível zerar o saldo do bilhete após algumas utilizações é $13{,}65 - 12{,}5 = \text{R\$ }1{,}15.$

Resposta da questão 13:
[C]



No $\Delta YWO: x = 2\cdot q$ (ângulo externo)
No $\Delta OYZ: q + 2x = 180° \Rightarrow 5\cdot q = 180° \Rightarrow q = 36°$

Logo, $\boxed{Y\hat{O}Z: 36°}$.

Resposta da questão 14:
[E]

$680 = (18\cdot 37{,}5 + 5)$ réis

$680 = (19\cdot 37{,}5 - 32{,}5)$ réis (não é possível voltar troco com as moedas disponíveis)

$680 = (20\cdot 37{,}5 - 70)$ réis

O troco deverá ser de 70 réis, uma de 10, uma de 20 e uma de 40 réis, conforme alternativa [E].

Resposta da questão 15:
[B]

Admitindo x o valor acrescido aos R$100,00 para facilitar o troco.
100 + x – 77 = 23 + x deverá ser múltiplo de 10, pois o operador do caixa só tinha notas de R$10,00, logo o menor valor de x possível é 7.
Assim, o cliente irá repassar R$107,00 ao operador do caixa.