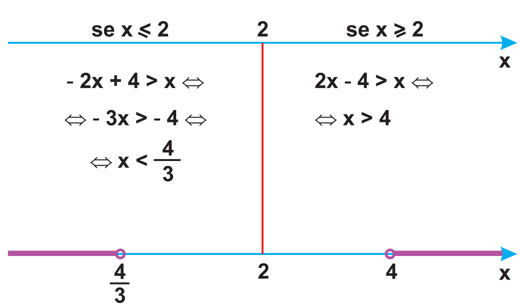
CADERNO 2 – SEMIEXTENSIVO E

FRENTE 1 – Álgebra

■ Módulo 5 – Módulo de um Número Real

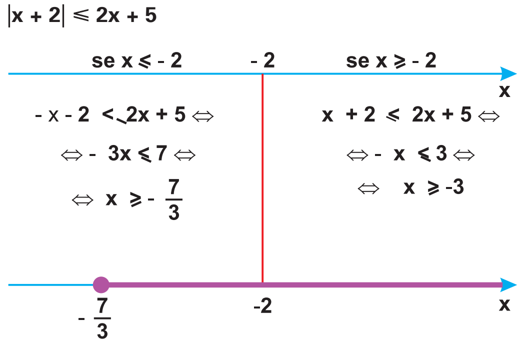
1) $|x^2 - 6x + 5| < -5$ não tem solução, pois $|a| \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$
Resposta: C

2) A igualdade
$|x^2 - x - 2| = 2x + 2$, com $2x + 2 \geq 0$, é verificada para:
1º) $x^2 - x - 2 = 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -1$
2º) $-x^2 + x + 2 = 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$
Assim, o conjunto solução da equação é $\{-1; 0; 4\}$ e a soma dos valores de x é igual a 3.
Resposta: B

3)


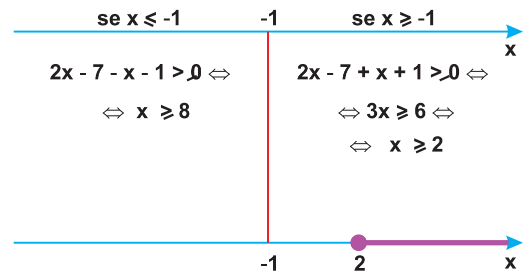
$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x < \frac{4}{3} \text{ ou } x > 4\right\}$$

Resposta: C

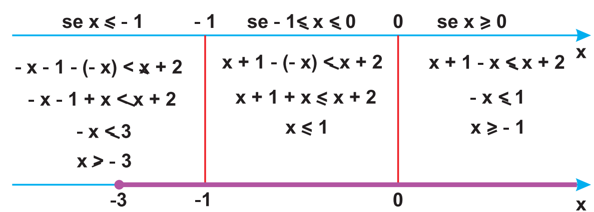
4) I) $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
II) $|x + 2| \leq 2x + 5$


Assim, $|x + 2| \leq 2x + 5 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{7}{3}$

Resposta: C

5) I) $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
II) $2x - 7 + |x + 1| \geq 0$


Assim, $2x - 7 + |x + 1| \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$
Resposta: D

6)


$V = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -3\}$
Resposta: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$

7) I) $x \geq 0 \Rightarrow (1 + x)(1 - x) \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ e $x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$.
II) $x \leq 0 \Rightarrow (1 + x)(1 - (-1)) \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (1 + x)(1 + x) \geq 0 \Leftrightarrow (1 + x)^2 \geq 0$
$\forall x \in \mathbb{R}$ e $x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$
O conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
Resposta: B

8) Lembrando que $\dfrac{|x|}{x} = 1$ se $x > 0$ e $\dfrac{|x|}{x} = -1$ se $x < 0$, temos:

1) $a > 0$ e $b > 0 \Rightarrow \dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab} = 1 + 1 - 1 = 1$

2) $a > 0$ e $b < 0 \Rightarrow \dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab} = 1 + (-1) - (-1) = 1$

3) $a < 0$ e $b > 0 \Rightarrow \dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab} = (-1) + (1) - (-1) = 1$

4) $a < 0$ e $b < 0 \Rightarrow \dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab} = (-1) + (-1) - (+1) = -3$

Então, sendo a e b dois números reais diferentes de zero, a expressão algébrica $\dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab}$ resulta 1 ou -3.

Resposta: D

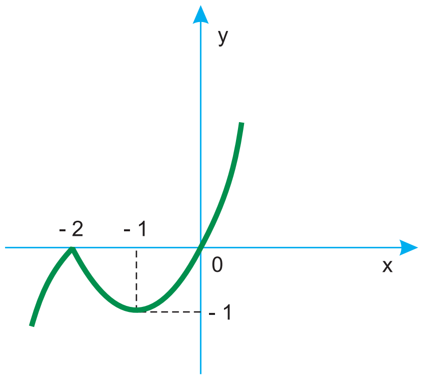
9) I) $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

II) Se $x \geq -2 \Rightarrow f(x) = x \cdot |x + 2| = x \cdot (x + 2)$

III) Se $x \leq -2 \Rightarrow f(x) = x \cdot |x + 2| = x \cdot (-x - 2)$

IV) O gráfico da função definida por

$$f(x) = x \cdot |x + 2| = \begin{cases} x \cdot (x + 2), \text{ para } x \geq -2 \\ x \cdot (-x - 2), \text{ para } x \leq -2 \end{cases} \text{ é:}$$



10) a) é falsa, pois se $x = 3$ e $y = -4$, tem-se $|x| < |y|$ e $x > y$

b) é verdadeira

c) é falsa, pois se $x = 3$ e $y = -4$, tem-se $|x + y| = |-1| = 1$ e $|x| + |y| = 3 + 4 = 7$

d) é falsa, pois $\left|-|x|\right| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

e) é falsa, pois se $x < 0$, então $|x| = -x$

Resposta: B

11) $|2x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2$

Resposta: E

12) $|2x - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$

Resposta: C

13) $|x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 1$

Resposta: E

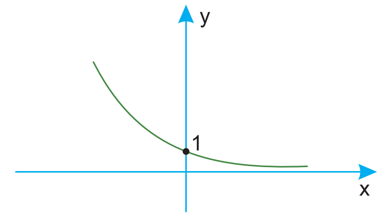
14) $|x^2 - 5x + 5| < 1 \Leftrightarrow -1 < x^2 - 5x + 5 < 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x^2 - 5x + 5 \\ x^2 - 5x + 5 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

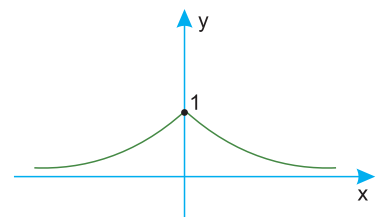
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \text{ ou } x > 3 \\ 1 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4$$

Resposta: B

15) I) O gráfico da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é

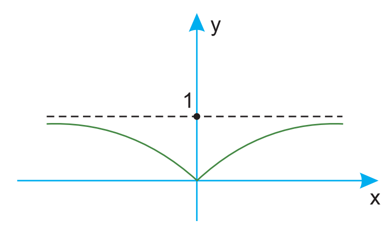


II) O gráfico da função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ é



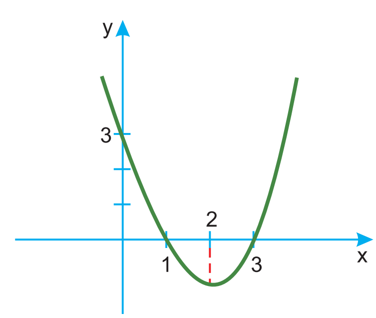
III) O gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$f(x) = 1 - 2^{-|x|} \Leftrightarrow f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ é

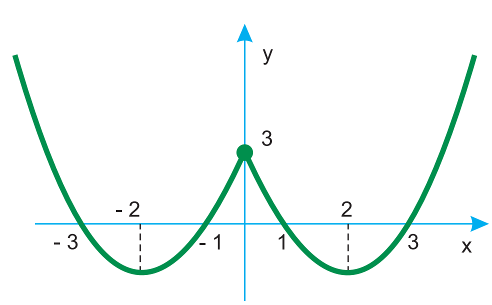


Resposta: C

16) I) O gráfico da função $g(x) = x^2 - 4x + 3$ é



II) O gráfico da função $f(x) = x^2 - 4|x| + 3 = |x|^2 - 4|x| + 3$ é



Resposta: B

17) I) $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$

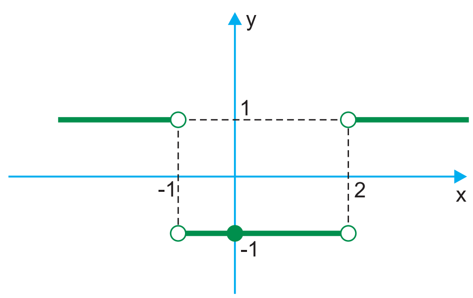
II) Se $x < -1$ ou $x > 2$, tem-se $x^2 - x - 2 > 0$ e

$$f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = 1$$

III) Se $-1 < x < 2$, tem-se $x^2 - x - 2 < 0$ e

$$f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 - x - 2} = \frac{-(x^2 - x - 2)}{x^2 - x - 2} = -1$$

Assim, o gráfico da função f é:



■ Módulo 6 – Matrizes – Definição e Operações

1) Se a matriz A é de ordem 2x3 e $a_{ij} = i \,.\, j$, então:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Resposta: C

2) A matriz de ordem 2x3 com $a_{ij} = \begin{cases} 2i - j, \text{ se } i \neq j \\ i + j, \text{ se } i = j \end{cases}$, é:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1 & 2.1 - 2 & 2.1 - 3 \\ 2.2 - 1 & 2 + 2 & 2.2 - 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Resposta: D

3) $$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Resposta: A

4) I) $$\frac{X - A}{2} = \frac{B + X}{3} + C \Leftrightarrow 3X - 3A = 2B + 2X + 6C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = 3A + 2B + 6C$$

II) Para as matrizes A, B e C dadas no enunciado, tem-se:

$$X = 3 \,.\, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + 2 \,.\, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 6 \,.\, \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & -6 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{bmatrix}$$

Resposta: B

5) $$2B - \frac{1}{2}A = 2 \,.\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Resposta: C

6) I) $$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow B^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

II) $$A - B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Resposta: B

7) $$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & y \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ z & t \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 3 \\ 1 + y = 2 \\ 1 + 0 = z \\ 2 - 1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Resposta: A

8) Lembrando que o produto de matrizes de ordens n x m e p x q existe se m = p e resulta numa nova matriz de ordem n x q. Pode-se observar que:

$$A_{n \times m} \,.\, B_{p \times q} = C_{n \times q}$$

iguais

resultado

I) Verdadeira, pois $A_{3 \times 2} \,.\, B_{2 \times 1} = C_{3 \times 1}$

=

3 x 1

II) Falso, pois $A_{5 \times 4} \,.\, B_{5 \times 2}$ não existe

≠

III) Verdadeira, pois $A_{2 \times 3} \,.\, B_{3 \times 2} = C_{2 \times 2}$

=

2 x 2

Resposta: B

9) Se A é uma matriz 3 x 4 e B uma matriz n x m, tem-se:

I) Existe A . B se, e somente se, n = 4

II) Existe B . A se, e somente se, m = 3

Resposta: C

10) $(4 \quad 1 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = (4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5) = (21)$

Resposta: C

11) I) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

II) $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

III) $AB - BA = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

Resposta: B

12) I) Se A é uma matriz 3 x 3 e $a_{ij} = (-2)^j$, tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} . & . & . \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ -2 & 4 & -8 \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

II) Se B é uma matriz 3 x 3 e $b_{ij} = (-1)^i$, tem-se:

$$B = \begin{pmatrix} . & . & b_{13} \\ . & . & b_{23} \\ . & . & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & -1 \\ . & . & 1 \\ . & . & -1 \end{pmatrix}$$

III) O elemento c_{23} da matriz $C = A \cdot B$ é dado por:

$c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} = (-2) \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + (-8) \cdot (-1) =$
$= 2 + 4 + 8 = 14$

Resposta: A

13) Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $A.B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 11 & 3 & 21 \end{pmatrix}$, devemos ter $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, tal que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 11 & 3 & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2d = 4 \\ 3a + 5d = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ d = 1 \end{cases}$$

Portanto, a soma dos elementos da primeira coluna da matriz B é $a + d = 3$.

Resposta: C

14) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tem-se:

I) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$

II) $2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$

III) $11 \cdot I = 11 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

IV) $A^2 + 2 \cdot A - 11 \cdot I = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Resposta: C

15) I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

II) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y - 1 \\ x - y + 3 \end{pmatrix}$

III) $\begin{pmatrix} y - 1 \\ x - y + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Logo, $x + y = -1$

Resposta: C

■ Módulo 7 – Determinantes – Propriedades, Teorema de Laplace e Regra de Chió

1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ x & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix} \Leftrightarrow 10 - 5x = x^2 - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = -7$ ou $x = 2$

A solução positiva, $x = 2$, é um número primo.

Resposta: B

2) A nova matriz obtida, de acordo com o enunciado, é $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, e o determinante dessa matriz é

$8 + 8 + 18 - 16 - 6 - 12 = 0$

Resposta: C

3) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & y \\ y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y + 1 \\ y & x + 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \cdot x - 0.1 + 0.1 - y.y = x(x + 1) - y(y + 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = x^2 + x - y^2 - y \Leftrightarrow 0 = x - y \Leftrightarrow y = x$

Observe que a expressão da alternativa a está correta, pois trata-se de uma soma de *matrizes*, porém, *não é equivalente* à expressão dada no enunciado que é uma soma de *determinantes*.

Resposta: E

4) $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \dfrac{1 - x}{1 - x} = 1 - x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 - x)^2 = 1 - x \Leftrightarrow (1 - x)^2 - (1 - x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 - x) \cdot (1 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow (1 - x) \cdot (-x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 0 \Rightarrow x = 0$, pois deve-se ter $1 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \{0\}$

Resposta: E

5) Se a matriz A é quadrada de ordem 2 com

$\begin{cases} a_{ij} = 2i - j, \text{ para } i = j \\ a_{ij} = 3i - 2j, \text{ para } i \neq j \end{cases}$, então:

I) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 - 1 & 3.1 - 2.2 \\ 3.2 - 2.1 & 2.2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

II) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-4) = 2 + 4 = 6$

Resposta: E

6) I) $A - x \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x & 2x \\ 3x & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4x & 1-2x \\ 3-3x & 4+x \end{pmatrix}$

II) $\det(A - x \cdot B) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2 - 4x) \cdot (4 + x) - (1 - 2x) \cdot (3 - 3x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8 + 2x - 16x - 4x^2 - 3 + 3x + 6x - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10x^2 - 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \dfrac{1}{2}$

Resposta: $x = \dfrac{1}{2}$ **ou** $x = -1$

7) $\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ -2 & -x & 4 \\ 1 & -3 & x \end{vmatrix} = 175 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x^2 + 4x + 18 + 3x + 24 + 2x^2 = 175 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7x + 42 = 175 \Leftrightarrow 7x = 133 \Leftrightarrow x = 19$

Resposta: V = {19}

8) I) $A = B^t \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 2 & y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & y \\ z & -x \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 0 \\ z = 2 \\ y + z = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$

II) $\begin{vmatrix} x & y & -1 \\ z & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -4 - 10 + 4 + 10 = 0$

Resposta: B

9) $\begin{vmatrix} 1+a & -1 \\ 3 & 1-a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 + a) \cdot (1 - a) + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - a^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2 \text{ ou } a = -2$

Resposta: A

10) I) $A \cdot B = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ -4 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-4 & a-5 \\ -4-4b & -4-5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a - 4 = 1 \\ a - 5 = 0 \\ -4 - 4b = 0 \\ -4 - 5b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \end{cases}$

II) Para $a = 5$ e $b = -1$, tem-se $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

III) $\det A = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 4 = -1$

IV) $\det A^2 = \det(A \cdot A) = \det A \cdot \det A = (-1) \cdot (-1) = 1$

Resposta: A

11) I) $M + k \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+k & -1 \\ 2 & 5+k \end{pmatrix}$

II) $\det(M + k \cdot I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2+k & -1 \\ 2 & 5+k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2 + k) \cdot (5 + k) + 2 = 0 \Leftrightarrow 10 + 2k + 5k + k^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 + 7k + 12 = 0 \Leftrightarrow k = -4 \text{ ou } k = -3$

Resposta: C

12) $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$, pois cada troca de filas paralelas provoca a troca do sinal do valor do determinante. Observe que, inicialmente, trocaram de posição a 1ª e a 2ª linhas e, finalmente, trocaram de posição a 1ª e a 2ª colunas.

Resposta: D

13) I) $x = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, pois trata-se do determinante de uma matriz e da sua transposta, cujos valores são iguais.

II) $y = \begin{vmatrix} -2a & -2c \\ 3b & 3d \end{vmatrix} = (-2) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = (-2) \cdot 3 \cdot x = -6x$

III) $\dfrac{y}{x} = \dfrac{-6x}{x} = -6$

Resposta: C

14) I) $\det A = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & a & m \\ 4 & b & n \\ 4 & c & p \end{vmatrix} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & m \\ 1 & b & n \\ 1 & c & p \end{vmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & m \\ 1 & b & n \\ 1 & c & p \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}$

II) $\det B = \begin{vmatrix} m & a & 3 \\ n & b & 3 \\ p & c & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} m & a & 1 \\ n & b & 1 \\ p & c & 1 \end{vmatrix} =$

$= 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & m \\ 1 & b & n \\ 1 & c & p \end{vmatrix} =$

$= 3 \cdot (-1) \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}$

Resposta: D

15) Se A é uma matriz quadrada de ordem 4 e $\det A = -6$, então:

$\det(2A) = x - 97 \Rightarrow 2^4 \cdot \det A = x - 97 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 \cdot (-6) = x - 97 \Leftrightarrow -96 = x - 97 \Leftrightarrow x = 1$

Resposta: C

16) "O determinante da matriz A^t (transposta de A) é igual ao determinante da matriz A", pode ser expressa matematicamente por $\det(A^t) = \det A$

Resposta: D

17) $D = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-c & 0 \\ b-c & c-a & 0 \\ c-a & a-b & 0 \end{vmatrix} = 0$

x1

x1

Resposta: E

18) $\begin{vmatrix} x & x+a & x+b \\ y & y+a & y+b \\ z & z+a & z+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & b \\ y & a & b \\ z & a & b \end{vmatrix} =$

.(–1)

$= a \,.\, b \,.\, \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = a \,.\, b \,.\, 0 = 0$, pois a 2ª e a 3ª colunas são iguais.

Resposta: A

19) $\begin{vmatrix} m+1 & m+2 & m+3 \\ m+2 & m+3 & m+4 \\ m+3 & m+4 & m+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & 2 \\ m+3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, pois a 2ª e a 3ª

.(–1)

colunas são proporcionais.

Resposta: C

20) Na matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, tem-se $a_{23} = 1$ e o seu cofator

é dado por:

$A_{23} = (-1)^{2+3} \,.\, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \,.\, 2 = -2$

Resposta: D

21) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 3x & x \\ x & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 \,.\, (-1)^{1+2} \,.\, \begin{vmatrix} x^2 & 3x & x \\ x & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \,.\, (-1)^3 \,.\, x \,.\, \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 \,.\, (-1) \,.\, x \,.\, x \,.\, 3 \,.\, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0,$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$, pois $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$ (filas paralelas iguais)

Resposta: D

22) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ x & 0 & x^2 & 0 \\ 1 & x & \log x & 8 \\ 0 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 \,.\, (-1)^{1+3} \,.\, \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x & 8 \\ 0 & 8 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \,.\, (-1)^4 \,.\, (x^3 - 64x) = 0 \Leftrightarrow 2 \,.\, 1 \,.\, x \,.\, (x^2 - 64) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -8$ ou $x = 8$

Resposta: D

23) $\begin{vmatrix} 1 & a & a & 0 \\ a & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 0 & a & a & 1 \end{vmatrix} > 0$

Multiplicando a 2ª, a 3ª e a 4ª coluna por 1 e somando-as à 1ª coluna, tem-se:

$\begin{vmatrix} 2a+1 & a & a & 0 \\ 2a+1 & 1 & 0 & a \\ 2a+1 & 0 & 1 & a \\ 2a+1 & a & a & 1 \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow (2a+1) \,.\, \begin{vmatrix} 1 & a & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & a & a & 1 \end{vmatrix} > 0$

Multiplicando a 1ª linha por (– 1) e somando-a às outras linhas, tem-se:

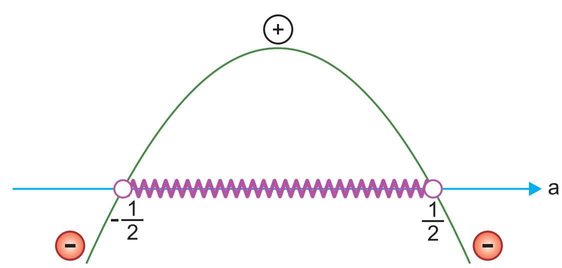
$(2a+1) \,.\, \begin{vmatrix} 1 & a & a & 0 \\ 0 & 1-a & -a & a \\ 0 & -a & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2a+1) \,.\, 1 \,.\, (-1)^{1+1} \,.\, \begin{vmatrix} 1-a & -a & a \\ -a & 1-a & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2a+1) \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, [(1-a)^2 - a^2] > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2a+1) \,.\, (1 - 2a + a^2 - a^2) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2a+1) \,.\, (1-2a) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{1}{2}$, pois o gráfico da função $f(a) = (2a+1) \,.\, (1-2a)$ é do tipo



Resposta: B

24) Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, são verdadeiras as seguintes propriedades:

I) $\det A = \det A^t$

II) $\det(A \,.\, B) = \det A \,.\, \det B$

III) $\det(A^2) = \det(A \,.\, A) = \det A \,.\, \det A = (\det A)^2$

IV) $\det A \,.\, \det A^t = \det A \,.\, \det A = (\det A)^2$

Não é verdadeira a afirmação $\det(A + B) = \det A + \det B$

Resposta: A

25) I) $A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ 1 & x \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = x^2 - 4$

II) $B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = -x^2$

III) $\det(A \,.\, B) = 0 \Rightarrow \det A \,.\, \det B = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 4) \,.\, (-x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$ ou $-x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$ ou $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$ ou $x = 0$

Resposta: E

26) $\det(A^2) = \det(A \,.\, A) = \det A \,.\, \det A = (\det A)^2$

Resposta: B

27) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, tem-se:

I) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & -7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

II) $n = \det(AB) = 0$, pois a 2ª e a 3ª linha são proporcionais.

III) Para $n = 0$, tem-se $7^n = 7^0 = 1$

Resposta: 1

28) I) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1$

II) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = ad - bc$

III) $\det(AB) = 0 \Rightarrow \det A \cdot \det B = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \cdot (ad - bc) = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0$

Resposta: C

29) $\begin{vmatrix} -\text{sen}\, x & -8 & -5 \\ 0 & -\text{sen}\, x & \text{cotg}\, x \\ 0 & 0 & \cos x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2 x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = 0$, pois $\text{sen}\, x \neq 0$ (observe que $\text{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$ não existe para $\text{sen}\, x = 0$, consequentemente, o determinante dado não poderia ser calculado).

Assim, $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$

Para $0 \le x \le 2$, o menor valor de x é obtido fazendo $n = 0$, que resulta $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Resposta: D

30) Seja $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, então:

I) $\det M = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1$.

II) $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ é a matriz dos cofatores.

III) $\overline{M} = (M')^t \Rightarrow \overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

IV) $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M} \cdot \overline{M} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Resposta: B

31) Se as matrizes são inversas uma da outra, então:

$A \cdot B = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot x & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot y \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot x & 1 \cdot (-1) + 4 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 + 2x & -1 + 2y \\ 2 + 4x & -1 + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2x = 1 \\ 2 + 4x = 0 \\ -1 + 2y = 0 \\ -1 + 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x + y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0.$

Resposta: E

32) Seja $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então:

I) $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + (-1) \cdot c & 0 \cdot b + (-1) \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 1, b = 0, c = 0, d = -1$, então $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

II) $A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

III) $(A + A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

IV) $(A + A^{-1})^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

Assim, $(A + A^{-1})^3 = 8 \cdot A$

Resposta: E

33) Se $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, então:

I) $\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

II) $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3(2 - 0) = -1 \cdot 2 = -2$

Se $b = b_{12}$ for o elemento da 1ª linha e 2ª coluna matriz inversa, então:

$b = b_{12} = \dfrac{A_{21}}{\det M} = \dfrac{-2}{2} = -1$

Resposta: B

34) Se A admite inversa, $\det A \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 2x & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x + 0 + 0 - 0 - 6x^2 - 0 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x^2 + 3x \neq 0 \Leftrightarrow 3x(-2x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ e } x \neq \dfrac{1}{2}$

Resposta: E

35) I) Se $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, seja $B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então:

$B \cdot B^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 1 \cdot a - 2c & 1 \cdot b - 2 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ a - 2c & b - 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ b - 2d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = \dfrac{1}{2} \\ d = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

II) $A \cdot B^{-1} = C \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} = C \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow C = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot \dfrac{1}{2} & 3 \cdot 0 + 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot \dfrac{1}{2} & -1 \cdot 0 + 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \end{bmatrix} =$$

$= \begin{bmatrix} 3 + 1 & 0 - 1 \\ -1 + 1 & 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

III) $A - B + C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

IV) $\det(A - B + C) = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 18 - (-2) = 20$

Resposta: B

36) I) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 3$

II) $B^{-1} = 2A \Rightarrow \det B^{-1} = \det(2A)$

Como a matriz A é quadrada de ordem 3, então:

$\det(2A) = 2^3 \cdot \det A = 8 \cdot \det A$

Assim, $\det B^{-1} = 8 \cdot \det A$

III) $\det B = \dfrac{1}{\det B^{-1}} = \dfrac{1}{8 \cdot \det A} = \dfrac{1}{8 \cdot 3} = \dfrac{1}{24}$

Resposta: E

37) I) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \det A = \dfrac{1}{\det A^{-1}} = 5$

II) $\det A = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 2x & 3 \end{vmatrix} = 5 \Leftrightarrow 3x + 2x = 5 \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$

Resposta: E

38) $(X \cdot A)^t = B \Rightarrow [(X \cdot A)^t]^t = B^t \Rightarrow$

$\Rightarrow X \cdot A = B^t \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B^t \cdot A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow X \cdot I = B^t \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B^t \cdot A^{-1}$

Resposta: B

39) a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 & a \cdot 2 + b \cdot 1 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 & c \cdot 2 + d \cdot 1 \end{bmatrix} =$

$\Leftrightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{bmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 2 \cdot c & 1 \cdot b + 2 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{bmatrix} =$

$\Leftrightarrow B \cdot A = \begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{bmatrix}$

c) $AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a + 2c \\ 2a + b = b + 2d \\ c = c \\ 2c + d = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases}$$

Resposta: D

Módulo 8 – Sistemas Lineares

1) $\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x + 3y - 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$

Regra de Cramer

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 3 - 3 + 0 - 0 - 0 - (-2) \therefore D = 2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 3 - 3 + 0 - 0 - 0 - 2 \therefore D_x = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 2 - 3 + 0 - 0 - (-3) - (-2) = 4 \therefore D_y = 4$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 3 + 2 + 0 - 3 - 0 -(-2) = 4 \therefore D_z = 4$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{2} = -1;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{4}{2} = 2;\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{4}{2} = 2$$

S = {– 1; 2; 2}

2) $\begin{cases} 3x + z = -5 \\ x + y + z = -2 \\ 2y - z = -3 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 14 \qquad x = \frac{D_x}{D} = \frac{14}{-7} = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 7 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{7}{-7} = -1$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -7 \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$3x_0 + 5y_0 + 4z_0 = 3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = -7$

Resposta: B

3) $\begin{cases} x + y + z = -2m \\ x - y - 2z = 2m \\ 2z + y - 2z = 3m + 5 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -2m & 1 & 1 \\ 2m & -1 & -2 \\ 3m+5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5m - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{D_x}{D} \Rightarrow x = \frac{-5m - 5}{5} = -m - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ 1 & 2m & -2 \\ 2 & 3m+5 & -2 \end{vmatrix} = 5m + 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{D_y}{D} \Rightarrow y = \frac{5m + 15}{5} = m + 3$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2m \\ 1 & -1 & 2m \\ 2 & 1 & 3m+5 \end{vmatrix} = -10m - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{D_z}{D} \Rightarrow z = \frac{-10m - 10}{5} = -2m - 2$$

S = {(– m – 1; m + 3; – 2m – 2)}

4) $\begin{cases} ax + y + a^2z = a^2 \\ bx + y + b^2z = b^2 \\ cx + y + c^2z = c^2 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & a^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & a^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = -(b-a)(c-b)(c-a)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & a^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix} = -(b-a)(c-b)(c-a)$$

Determinante de D_z observe que é idêntico ao determinante da matriz incompleta (D) pois os resultados das equações coicidem com os coeficientes de z.

Resposta: E

5) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 13 \\ 3x + y + 2z = 13 \\ 4x + 3y + az = 14 \end{cases}$

Para que o sistema tenha uma única solução (SPD) basta que o determinante dele seja não nulo ($D \neq 0$).

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 25 - 5a \neq 0 \Rightarrow a \neq 5$$

Resposta: D

6) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 13 \\ 3x + y + 2z = 13 \\ 4x + 3y + z = 14 \end{cases}$

a = 1

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 25 - 5a = 25 - 5 = 20$$

(para a = 1)

$$D_x = \begin{vmatrix} 13 & 2 & 3 \\ 13 & 1 & 2 \\ 14 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 13 & 2 \\ 13 & 1 \\ 14 & 3 \end{matrix} = 13 + 56 + 117 - 42 - 78 - 26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_x = 40 \ \therefore\ x = \frac{D_x}{D} = \frac{40}{20} = 2$$

$$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 13 & 3 & 1 & 13 \\ 3 & 13 & 2 & 3 & 13 \\ 4 & 14 & 1 & 4 & 14 \end{array}\right| = 13 + 104 + 126 - 156 - 28 - 39 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_y = 20 \therefore y = \frac{D_y}{D} \Rightarrow y = \frac{20}{20} = 1$$

$$D_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 13 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 13 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 14 & 4 & 3 \end{array}\right| = 14 + 104 + 117 - 52 - 39 - 84 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_z = 60 \therefore z = \frac{D_z}{D} \Rightarrow z = \frac{60}{20} = 3$$

$S = \{(2; 1; 3)\}$

7) $\begin{cases} 2kx - y = 2 \\ 5x + ky = 22 \end{cases}$

a) Se $(k; 3k)$ é solução então

$$\begin{cases} 2k \cdot k - 3k = 2 \\ 5 \cdot k + k \cdot 3k = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k^2 - 3k = 2 \\ 5k + 3k^2 = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k^2 - 3k - 2 = 0 \\ 3k^2 + 5k - 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \text{ ou } k_2 = -\dfrac{1}{2} \\ k_1 = 2 \text{ ou } k_2 = -\dfrac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow k = 2$$

b) Para $k = 2$ a solução será $(k; 3k) = (2; 6)$ e portanto $x + y = 2 + 6 = 8$

Resposta: C

FRENTE 2 – Trigonometria

Módulo 5 – Funções Trigonométricas de um Ângulo Audo

1) $C = 2 \, . \, \pi \, . \, R = 2 \, . \, \pi \, . \, 5 \text{ cm} = 10 \, . \, \pi \text{ cm}$

Resposta: $10 \, . \, \pi$ cm

2) $\alpha = \dfrac{\text{comp}(\widehat{AB})}{r} \Rightarrow 1{,}2 = \dfrac{12 \text{ cm}}{r} \Leftrightarrow r = \dfrac{12 \text{ cm}}{1{,}2} = 10 \text{ cm}$

Resposta: 10 cm

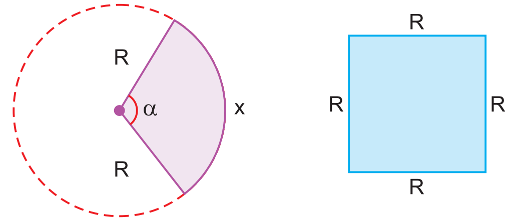
3) I) $\alpha = 30° = \dfrac{30° \, . \, \pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{\pi}{6}$ rad

II) $\alpha = \dfrac{\text{comp}(\widehat{AB})}{r} \Rightarrow \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\text{comp}(\widehat{AB})}{3 \text{ cm}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{comp}(\widehat{AB}) = \dfrac{\pi \, . \, 3 \text{ cm}}{6} = \dfrac{3{,}14 \text{ cm}}{2} = 1{,}57 \text{ cm}$

Resposta: 1,57 cm

4)



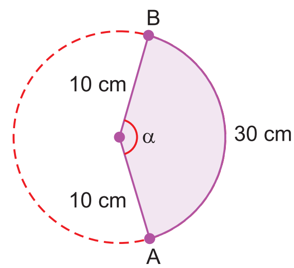
I) Se o perímetro do setor circular é igual ao perímetro do quadrado, então, $x + R + R = 4R \Leftrightarrow x = 2R$

II) Pela definição de medida de arco, em radianos, temos:

$\alpha = \dfrac{x}{R} = \dfrac{2R}{R} = 2$

Resposta: B

5)



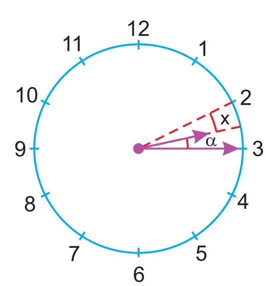
$\alpha = \dfrac{\text{comp}(\widehat{AB})}{r} = \dfrac{30 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 3$

Resposta: 3 rad

6) $12° = \dfrac{12° \, . \, \pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{\pi}{15} \text{ rad} \cong \dfrac{3{,}14}{15} \text{ rad} \cong 0{,}209 \text{ rad}$

Resposta: 0,209 rad

7)



I) Para o ponteiro pequeno, temos:

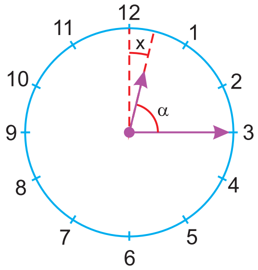
tempo	*ângulo*
60 min	30°
15 min	x

$\Rightarrow x = \dfrac{15 \, . \, 30°}{60} = 7{,}5° = 7°30'$

II) $x + \alpha = 30° \Rightarrow \alpha = 30° - x = 30° - 7°30' = 22°30'$

Resposta: 22°30'

8)



I) Para o ponteiro pequeno, temos:

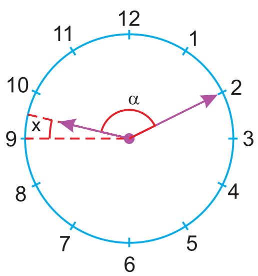
tempo ——— *ângulo*

$$\left.\begin{array}{l} 60 \text{ min} \text{ ——————— } 30° \\ 15 \text{ min} \text{ ——————— } x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{15 \,.\, 30°}{60} = 7{,}5° = 7°30'$$

II) $x + \alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 90° - x = 90° - 7°30' = 82°30'$

Resposta: 82°30′

9)



I) Para o ponteiro pequeno, temos:

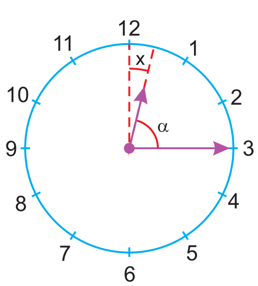
tempo ——— *ângulo*

$$\left.\begin{array}{l} 60 \text{ min} \text{ ——————— } 30° \\ 10 \text{ min} \text{ ——————— } x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{10 \,.\, 30°}{60} = 5°$$

II) $x + \alpha = 150° \Rightarrow \alpha = 150° - x = 150° - 5° = 145°$

Resposta: 145°

10)



I) Para o ponteiro pequeno, temos:

tempo ——— *ângulo*

$$\left.\begin{array}{l} 60 \text{ min} \text{ ——————— } 30° \\ 15 \text{ min} \text{ ——————— } x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{15 \,.\, 30°}{60} = 7{,}5° = 7°30'$$

II) $x + \alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 90° - x = 90° - 7°30' = 82°30'$

Resposta: E

11) I) *Verdadeira*, pois para o ponteiro das horas, temos:

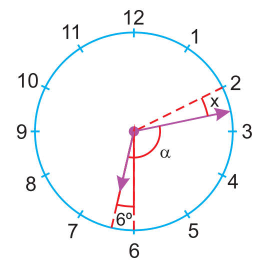
tempo ——— *ângulo*

$$\left.\begin{array}{l} 60 \text{ min} \text{ ——————— } 30° \\ t \text{ min} \text{ ——————— } x \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{t \,.\, 30°}{60} = \frac{t}{2} \text{ graus}$$

II) *Verdadeira*, pois para t = 12, temos:

$$\alpha = \frac{12}{2} \text{ graus} = 6°$$

III) *Verdadeira*, pois:



Para o ponteiro pequeno, temos:

tempo ——— *ângulo*

$$\left.\begin{array}{l} 60 \text{ min} \text{ ——————— } 360° \\ 2 \text{ min} \text{ ——————— } x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{2 \,.\, 360°}{60} = 12°$$

Portanto, $x + \alpha = 120° + 6° \Rightarrow 12° + \alpha = 126° \Leftrightarrow \alpha = 114°$

IV) Verdadeira, pois em 12 minutos o ponteiro dos minutos percorre $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ da volta, assim, a extremidade descreve um arco de $\frac{1}{5} \,.\, 2 \,.\, \pi \,.\, R = \frac{1}{5} \,.\, 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 10 \text{ cm} = 12{,}56 \text{ cm}$, pois R = 10 cm é a medida do ponteiro e corresponde ao raio da circunferência.

Resposta: E

12) a)
$$\begin{array}{r|l} 1000° & 360° \\ \hline -720° & 2 \\ \hline 280° & \end{array}$$
$\Rightarrow$ 1000° = 2 . 360° + 280°, portanto, a 1ª determinação positiva é 280°.

b)
$$\begin{array}{r|l} -1210° & -360° \\ \hline +1080° & 3 \\ \hline -130° & \end{array}$$
$\Rightarrow$ – 1210° = 3 . (– 360°) – 130°, assim, a 1ª determinação *negativa* é – 130°, portanto, a 1ª determinação *positiva* é 360° – 130° = 230°

c)
$$\begin{array}{r|l} \frac{8\pi}{3} & 2\pi = \frac{6\pi}{3} \\ \hline -\frac{6\pi}{3} & 1 \\ \hline \frac{2\pi}{3} & \end{array}$$
$\Rightarrow \frac{8\pi}{3} = 1 \,.\, 2\pi + \frac{2\pi}{3}$, portanto, a 1ª determinação positiva é $\frac{2\pi}{3}$

Respostas: a) 280°; b) 230°; c) $\frac{2\pi}{3}$

13) Os arcos côngruos de – 60° são do tipo – 60° + n . 360°, com $n \in \mathbb{Z}$. Assim, os arcos positivos menores que 1500°, são:

I) Para n = 1 ⇒ – 60° + 1 . 360° = 300°

II) Para n = 2 ⇒ – 60° + 2 . 360° = 660°

III) Para n = 3 ⇒ – 60° + 3 . 360° = 1020°

IV) Para n = 4 ⇒ – 60° + 4 . 360° = 1380°

Resposta: 300°, 660°, 1020° e 1380°

14) a) $n \cdot 2\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ b) $\dfrac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

c) $\pi + n \cdot 2\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ d) $\dfrac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

e) $150° + n \cdot 360°$ $(n \in \mathbb{Z})$ f) $300° + n \cdot 360°$ $(n \in \mathbb{Z})$

15) a) $\dfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ b) $n \cdot \pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

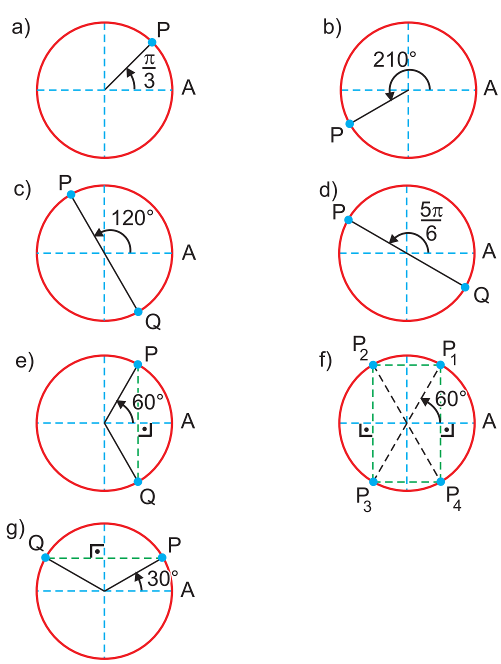
c) $\dfrac{\pi}{4} + n \cdot \pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ d) $\dfrac{3\pi}{4} + n \cdot \pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

e) $n \cdot \dfrac{\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$ f) $\dfrac{\pi}{4} + n \cdot \dfrac{\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$

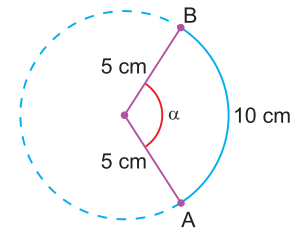
g) $\pm \dfrac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ h) $\pm \dfrac{\pi}{3} + n \cdot \pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

i) $\pm 120° + n \cdot 360°$ $(n \in \mathbb{Z})$

16)



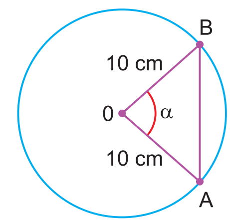
17)



$$\alpha = \frac{\text{comp}(\widehat{AB})}{r} = \frac{10 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 2$$

Resposta: 2 rad

18)



I) Se a corda $\overline{AB}$ mede 10 cm, então, o triângulo OAB é equilátero, portanto, $A\hat{O}B = \alpha = 60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad

II) $\alpha = \dfrac{\text{comp}(\widehat{AB})}{r} \Rightarrow \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\text{comp}(\widehat{AB})}{10 \text{ cm}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{comp}(\widehat{AB}) = \dfrac{10\,\pi}{3}$ cm

Resposta: $\dfrac{10\,\pi}{3}$ cm

■ Módulo 6 – Funções Trigonométricas no Ciclo Trigonométrico

1) Para x variando de 0° a 360°, a expressão (6 – sen x) assume valor mínimo quando sen x é máximo, ou seja, quando sen x = 1.
Assim, para sen x = 1, tem-se 6 – sen x = 6 – 1 = 5
Resposta: C

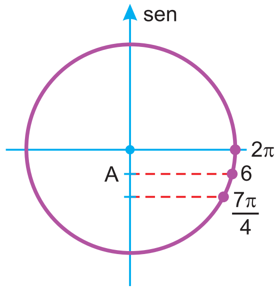
2) I) 1920° = 5 . 360° + 120° ⇒ 120° é 1ª determinação positiva

II) sen 1920° = sen 120° = sen 60° = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3) I) $\dfrac{7\pi}{4} \cong \dfrac{7 \cdot 3{,}14}{4} \cong 5{,}5$

II) $2\pi \cong 2 \cdot 3{,}14 = 6{,}28$



III) $5{,}5 < 6 < 6{,}28 \Rightarrow \dfrac{7\pi}{4} < 6 < 2\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,\dfrac{7\pi}{4} < \text{sen}\,6 < \text{sen}\,2\pi \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < A < 0$

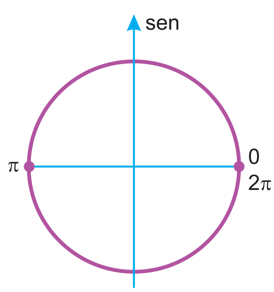
Resposta: E

4) $\left(\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2};\ \text{sen}\,\dfrac{\pi}{3};\ \text{sen}\,\dfrac{\pi}{4};\ \ldots;\ \text{sen}\,\dfrac{\pi}{n};\ \ldots\right) =$

$= \left(1;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \ldots\right)$ **é uma sequência estritamente decrescente, de termos positivos e tende a zero.**

Resposta: B

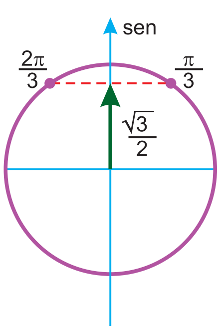
5) $\text{sen}\,x = 0$



Para $0 \le x \le 2\pi$**, temos** $x = 0$ **ou** $x = \pi$ **ou** $x = 2\pi$

Resposta: $V = \{0;\ \pi;\ 2\pi\}$

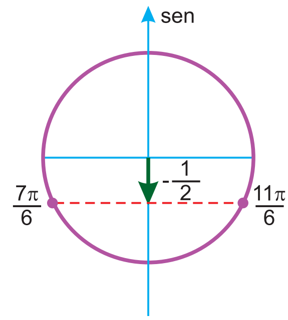
6) $\text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Para $0 \le x \le 2\pi$**, temos** $x = \dfrac{\pi}{3}$ **ou** $x = \dfrac{2\pi}{3}$

Resposta: $V = \left\{\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{2\pi}{3}\right\}$

7) $\text{sen}\,x = -\dfrac{1}{2}$



Para $0 \le x \le 2\pi$**, temos** $x = \dfrac{7\pi}{6}$ **ou** $x = \dfrac{11\pi}{6}$

Resposta: $V = \left\{\dfrac{7\pi}{6};\ \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

8) $\text{sen}^2x = 1 - \cos^2x = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = 1 - \dfrac{15}{16} = \dfrac{1}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,x = -\dfrac{1}{4}$**, pois** $x \in 4^{\underline{o}}$ **quadrante**

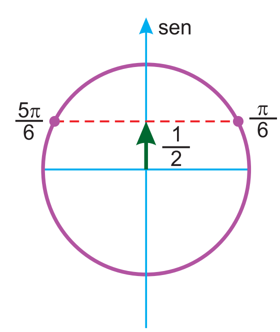
Resposta: D

9) $-1 \le \text{sen}\,\theta \le 1 \Rightarrow -1 \le \dfrac{2x - 1}{3} \le 1 \Leftrightarrow -3 \le 2x - 1 \le 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 \le 2x \le 4 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$

Resposta: $-1 \le x \le 2$

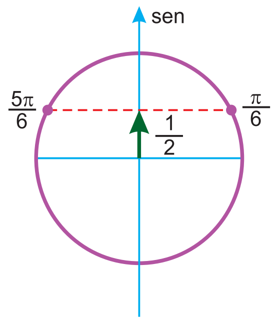
10) $\text{cossec}\,x = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = 2 \Leftrightarrow \text{sen}\,x = \dfrac{1}{2}$



Para $0 \le x \le 2\pi$**, temos** $x = \dfrac{\pi}{6}$ **ou** $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Resposta: $V = \left\{\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

11) $\text{sen } x = \frac{1}{2}$



A solução geral da equação, nesses 2 pontos, é:

$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

Resposta: $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \right\}$ $(n \in \mathbb{Z})$

12) $E = \frac{\text{sen } 90° + \cos 360° + \text{sen } 270° \cdot \cos 180°}{\cos 0° + \text{sen } 0°} =$

$= \frac{1 + 1 + (-1) \cdot (-1)}{1 + 0} = \frac{3}{1} = 3$

Resposta: 3

13) Para $x = \frac{\pi}{2}$, temos:

$y = \frac{\cos x + \text{sen } 2x - \text{sen } 3x}{\cos 4x + \text{sen } x} =$

$= \frac{\cos \frac{\pi}{2} + \text{sen } \pi - \text{sen } \frac{3\pi}{2}}{\cos 2\pi + \text{sen } \frac{\pi}{2}} = \frac{0 + 0 - (-1)}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

Resposta: B

14) Como $-1 \le \cos x \le 1$ para $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\sqrt{2} > 1$, não existe arco x tal que $\cos x = \sqrt{2}$

Resposta: E

15) I) $\frac{7\pi}{2} = 2\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{3\pi}{2}$ é a 1ª determinação positiva

II) $31\pi = 15 \cdot 2\pi + \pi \Rightarrow \pi$ é a 1ª determinação positiva

III) $\text{sen}\left(\frac{7\pi}{2}\right) \cdot \cos(31\pi) = \text{sen } \frac{3\pi}{2} \cdot \cos \pi = (-1) \cdot (-1) = 1$

Resposta: 1

16) $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -3 \le -3 \cdot \cos x \le 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 - 3 \le 2 - 3 \cdot \cos x \le 2 + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 \le f(x) \le 5 \Rightarrow Im(f) = [-1; 5]$

Resposta: E

17) Para $\forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \cos^2 x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{2}{3} \cos^2 x \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \le 2 + \frac{2}{3} \cos^2 x \le \frac{8}{3}$

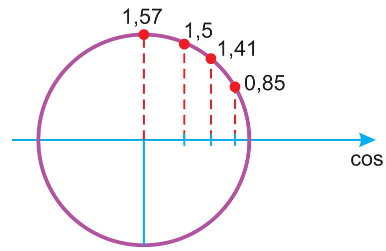
Dessa forma: $2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$

Resposta: D

18) I) $\frac{\pi}{2} \cong \frac{3,14}{2} = 1,57$

II) $\sqrt{2} \cong 1,41$

III) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cong \frac{1,7}{2} = 0,85$



IV) Observando a figura, tem-se:

$\cos 1,57 < \cos 1,5 < \cos 1,41 < \cos 0,85 \Rightarrow$

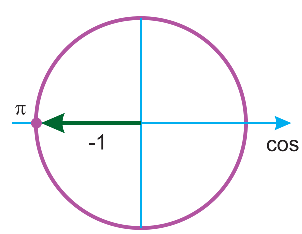
$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} < \cos 1,5 < \cos \sqrt{2} < \cos \frac{\sqrt{3}}{2}$

Assim, se $F(x) = \cos x$, conclui-se que

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) < F(1,5) < F(\sqrt{2}) < F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Resposta: E

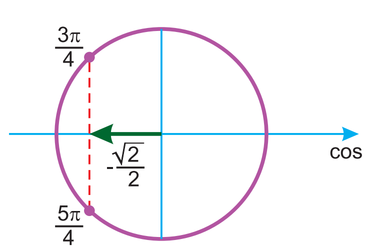
19) $\cos x = -1$



Para $0 \le x \le 2\pi$, temos $x = \pi$

Resposta: $V = \{\pi\}$

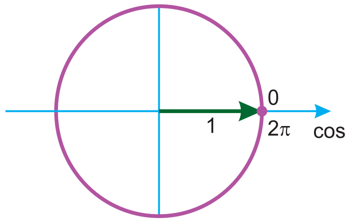
20) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



Para $0 \le x \le 2\pi$, temos $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$

Resposta: $V = \left\{ \dfrac{3\pi}{4} ; \dfrac{5\pi}{4} \right\}$

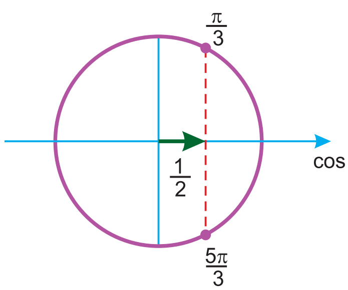
21) $\sec x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1$



Para $0 \le x \le 2\pi$, temos $x = 0$ ou $x = 2\pi$

Resposta: $V = \{0; 2\pi\}$

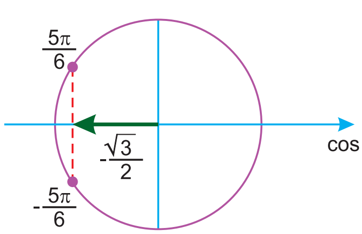
22) $\sec x = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos x} = 2 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$



Para $0 \le x \le 2\pi$, temos $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$

Resposta: $V = \left\{ \dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{5\pi}{3} \right\}$

23) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

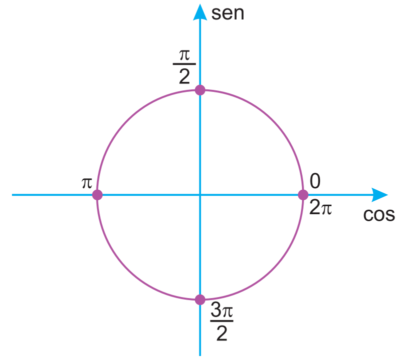


A solução geral da equação, nesses 2 pontos, é:

$x = \pm \dfrac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

Resposta: $V = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \pm \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \right\}$

24) $\text{sen } x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\cos x = 0$

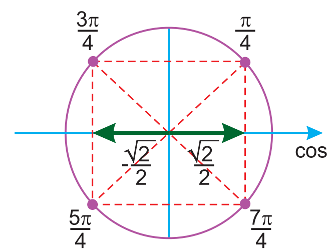


A solução geral da equação, nesses 4 pontos, é:

$x = 0 + n \cdot \dfrac{\pi}{2} = n \cdot \dfrac{\pi}{2}$

Resposta: $V = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = n \cdot \dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$

25) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



A solução geral da equação, nesses 4 pontos é

$x = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot \dfrac{\pi}{2}$

Resposta: $V = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot \dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$

26) Para $x = \dfrac{\pi}{2}$, temos:

$A = \text{sen } 3x + \cos 4x - \text{tg } 2x =$

$= \text{sen } \dfrac{3\pi}{2} + \cos 2\pi - \text{tg } \pi = -1 + 1 - 0 = 0$

Resposta: zero

27) Para $x = \dfrac{\pi}{3}$, temos:

$$\frac{\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) + 2 \cdot \tan\left(\dfrac{3x}{4}\right)}{3 \cdot \cos x} = \frac{\text{sen } \dfrac{\pi}{6} + 2 \cdot \tan \dfrac{\pi}{4}}{3 \cdot \cos \dfrac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + 2 \cdot 1}{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Resposta: B

28) **Se $\frac{\pi}{3}$ é raiz da equação $tg^2x - m \cdot cos^2x + sen^2x = 0$, então:**

$$tg^2 \frac{\pi}{3} - m \cdot cos^2 \frac{\pi}{3} - sen^2 \frac{\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3})^2 - m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{m}{4} + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow 12 - m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 15$$

Resposta: 15

29) **Se $tg\ x = \sqrt{1\,302\,076} > 0$, x pode pertencer ao 1º ou 3º quadrantes, pois são os quadrantes nos quais a tangente é positiva.**
Resposta: B

30) **Para $x = \frac{\pi}{2}$, temos:**

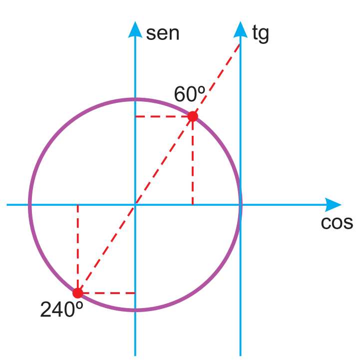
$$y = cos\ 4x + sen\ 2x + tg\ 2x - sec\ 8x =$$

$$= cos\ 2\pi + sen\ \pi + tg\ \pi - sec\ 4\pi = 1 + 0 + 0 - \frac{1}{cos\ 4\pi} =$$

$$= 1 + 0 + 0 - \frac{1}{1} = 0$$

Resposta: D

31)



I) $sen\ 240° = -\ sen\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

II) $cos\ 240° = -\ cos\ 60° = -\frac{1}{2}$

III) $tg\ 240° = tg\ 60° = \sqrt{3}$

IV) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{1}{2} < \sqrt{3} \Rightarrow sen\ 240° < cos\ 240° < tg\ 240°$

Resposta: C

32) **I)** $1440° = 4 \cdot 360° + 0°$

II) $810° = 2 \cdot 360° + 90°$

III) $720° = 2 \cdot 360° + 0°$

IV) $cos\ 1440° + sen\ 810° + tg\ 720° =$

$= cos\ 0° + sen\ 90° + tg\ 0° = 1 + 1 + 0 = 2$

Resposta: B

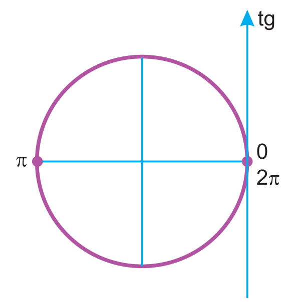
33) **I)** $\begin{cases} sen\ \alpha < 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha \in$ 3º quadrante

II) $\begin{cases} cos\ \beta < 0 \\ tg\ \beta < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos\ \beta < 0 \\ sen\ \beta > 0 \end{cases} \Rightarrow \beta \in$ 2º quadrante

III) $\begin{cases} sen\ \gamma > 0 \\ cotg\ \gamma > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sen\ \gamma > 0 \\ cos\ \gamma > 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma \in$ 1º quadrante

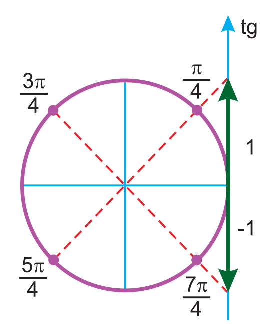
Resposta: A

34) $tg\ x = 0$



Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos $x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
Resposta: $V = \{0; \pi; 2\pi\}$

35) $tg\ x = \pm 1 \Leftrightarrow tg\ x = -1$ ou $tg\ x = 1$



Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$ ou

$x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Resposta: $V = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

36) **I)** $cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow cos\ \alpha = -\frac{4}{5}$, pois $\alpha \in$ 2º quadrante

II) $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

Resposta: C

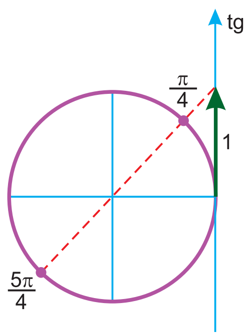
37) I) $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{2}{4} = \dfrac{2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, pois $x \in 2^{\underline{o}}$ quadrante

II) $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = -1$

Resposta: A

38) $\text{cotg}\, x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\text{tg}\, x} = 1 \Leftrightarrow \text{tg}\, x = 1$

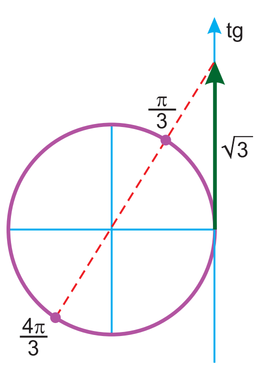


Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$

Resposta: $V = \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right\}$

39) $\text{cotg}\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\text{tg}\, x} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

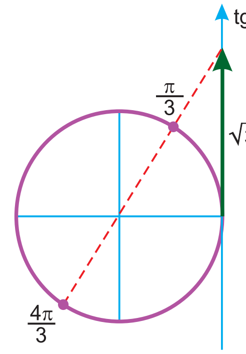
$\Leftrightarrow \text{tg}\, x = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$



Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$

Resposta: $V = \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

40) $\text{tg}\, x = \sqrt{3}$



A solução geral da equação, nesses 2 pontos, é:

$x = \dfrac{\pi}{3} + n \cdot \pi$

Resposta: $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{3} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

41) Para $\text{cossec}\, x = \dfrac{5}{4}$, tem-se:

I) $\text{cossec}\, x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x} \Rightarrow \dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{\text{sen}\, x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\, x = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \text{sen}^2 x = \dfrac{16}{25}$

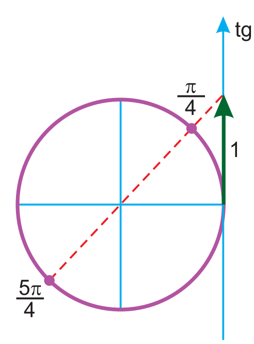
II) $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25}$

III) $\text{tg}^2 x = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\dfrac{16}{25}}{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{16}{9}$

IV) $25 \cdot \text{sen}^2 x - 9 \cdot \text{tg}^2 x = 25 \cdot \dfrac{16}{25} - 9 \cdot \dfrac{16}{9} = 16 - 16 = 0$

Resposta: D

42) $\text{sen}\, x = \cos x \Leftrightarrow \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \text{tg}\, x = 1$

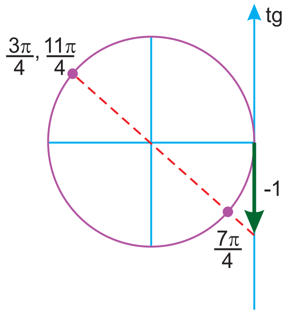


Para $0 < x < 2\pi$, temos $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$

Resposta: $V = \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right\}$

43) $\cos x + \text{sen } x = 0 \Leftrightarrow \text{sen } x = -\cos x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen } x}{\cos x} = -1 \Leftrightarrow \text{tg } x = -1$$



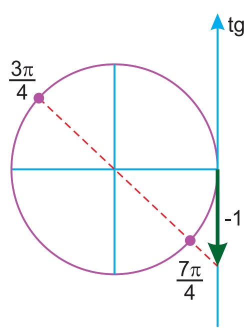
Para $x \in [0; 3\pi]$, temos $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$ ou $x = \frac{11\pi}{4}$, portanto, 3 soluções.

Resposta: C

44) Para que a função $f(x) = \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x + \cos x}$ exista, devemos ter

$\text{sen } x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \text{sen } x \neq -\cos x \Leftrightarrow$

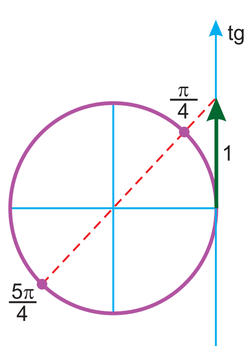
$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen } x}{\cos x} \neq -1 \Leftrightarrow \text{tg } x \neq -1$$



Assim, o domínio da função é $x \neq \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi$

Resposta: $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi\right\}$ $(n \in \mathbb{Z})$

45) $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$



A solução geral da equação é:

$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi$$

Resposta: $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

46) Para que a função $f(x) = 2 - \text{tg}\left(\frac{x}{3}\right)$ exista, devemos ter:

$$\frac{x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + n \cdot 3\pi$$

Resposta: $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{3\pi}{2} + n \cdot 3\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

47) A função $y = \text{tg}(2x - 30°)$ não é definida para

$2x - 30° = 90° + n \cdot 180° \Leftrightarrow 2x = 120° + n \cdot 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 60° + n \cdot 90°$

Sendo $0° < x < 90°$, temos, para $n = 0$, $x = 60°$

Resposta: 60°

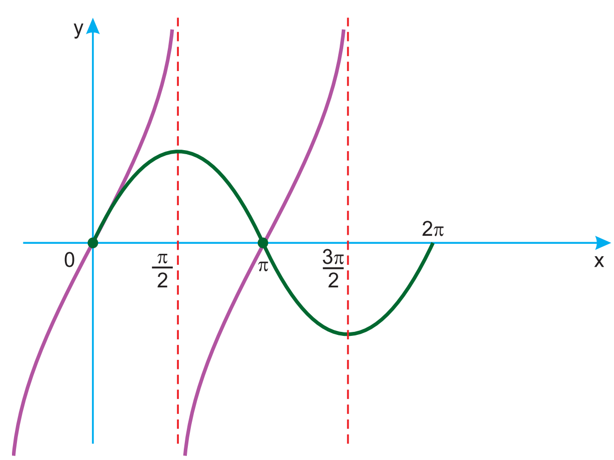
48) $\text{tg } x + \text{cotg } x = 3 \Leftrightarrow \frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen } x} = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen } x \cdot \cos x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\text{sen } x \cdot \cos x} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen } x \cdot \cos x = \frac{1}{3}$$

Resposta: D

49) Sendo $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \text{tg } x$, temos os seguintes gráficos:



Os pontos de encontro dos gráficos das funções são as soluções da equação $f(x) = g(x)$, assim, temos:

$$\text{sen } x = \text{tg } x \Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \Leftrightarrow \text{sen } x - \frac{\text{sen } x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen } x \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{sen } x = 0 \text{ ou } \cos x = 1 \Leftrightarrow x = n \cdot \pi$$

Para $0 < x < \pi$, a equação não tem solução, ou seja, não existem pontos de encontro dos gráficos.

Resposta: zero

50) Se $\frac{\pi}{2} < y < \pi$, então:

$$\begin{cases} \text{tg } y = 2x + 3 \\ \text{cotg } y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tg } y = 2x + 3 \\ \frac{1}{\text{tg } y} = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tg } y = 2x + 3 \\ \frac{1}{2x + 3} = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{tg } y = 2x + 3 \\ 2x^2 + 5x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{tg } y = 2x + 3 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{tg } y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Resposta: $x = -2$ e $y = \frac{3\pi}{4}$

51) I) $\begin{cases} \sec x + \text{tg } x = m \\ \sec x - \text{tg } x = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \,.\, \text{tg } x = m - n \\ 2 \,.\, \sec x = m + n \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{tg } x = \frac{m - n}{2} \\ \sec x = \frac{m + n}{2} \end{cases}$$

II) $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x \Rightarrow \left(\frac{m + n}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{m - n}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 + 2m.n + n^2}{4} = 1 + \frac{m^2 - 2m.n + n^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m.n + n^2 = 4 + m^2 - 2m.n + n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4m.n = 4 \Leftrightarrow m.n = 1$$

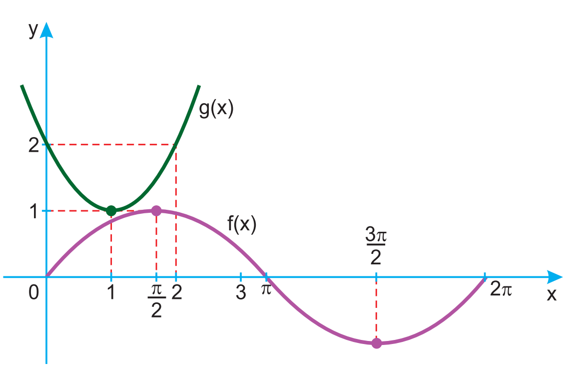
Resposta: B

52) Considerando a função $g(x) = x^2 - 2x + 2$, tem-se:

I) A abscissa do vértice é $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

II) A ordenada do vértice é $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4}{4} = 1$

Representando graficamente as funções $g(x) = x^2 - 2x + 2$ e $f(x) = \text{sen } x$, temos:

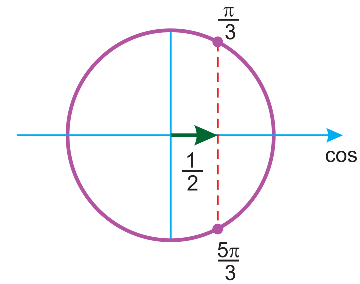


Como os gráficos não possuem intersecção, a equação $\text{sen } x = 2 - 2x + x^2 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ não tem solução.

Resposta: zero

53) $9^{-\cos x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (3^2)^{-\cos x} = 3^{-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^{-2\cos x} = 3^{-1} \Leftrightarrow -2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$



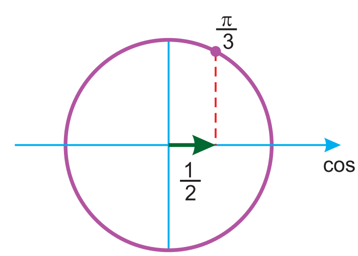
O menor valor positivo de x para o qual $\cos x = \frac{1}{2}$ é $\frac{\pi}{3}$.

Resposta: C

54) I) $\frac{625^{\cos^2 x}}{25^{\cos x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(25^2)^{\cos^2 x}}{25^{\cos x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{25^{2\,.\,\cos^2 x}}{25^{\cos x}} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 25^{2\,.\,\cos^2 x - \cos x} = 25^0 \Leftrightarrow 2 \,.\, \cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x \,.\, (2 \,.\, \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2}$$



II) Para $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, $\cos x = 0$ não tem solução e

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Resposta: D

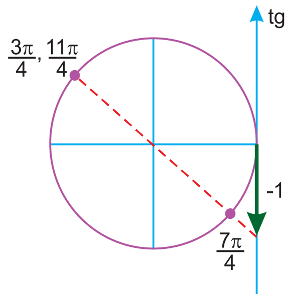
55) Como $-1 \le \text{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \le 1$, o valor mínimo de P(t) é obtido quando $\text{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -1$, isto é:

$$t - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = 2\pi$$

Resposta: D

56) $\cos x + \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1$$



Para $x \in [0; 3\pi]$, temos $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{11\pi}{4}$,

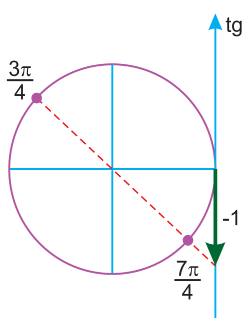
portanto, 3 soluções.

Resposta: C

57) Para que a função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ exista, devemos ter

$\operatorname{sen} x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \neq -\cos x \Leftrightarrow$

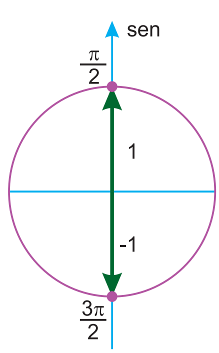
$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \neq -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \neq -1$$



Assim, o domínio da função é $x \neq \dfrac{3\pi}{4} + n \cdot \pi$

Resposta: $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3\pi}{4} + n \cdot \pi\right\}$ $(n \in \mathbb{Z})$

58) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^6 x = 3 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^4 x = \operatorname{sen}^6 x = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 1$ ou $\operatorname{sen} x = -1$



A solução geral da equação é $x = \dfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

Resposta: $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

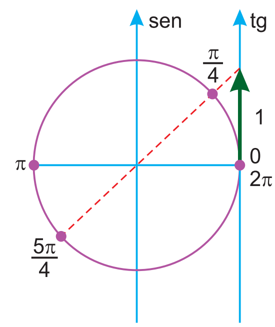
59) Para que a função $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1 - \operatorname{sen} x}$ exista, devemos ter

$1 - \operatorname{sen} x \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$

Resposta: $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + n2\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

60) $\operatorname{sen} x = \sec x - \cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{\cos x} - \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 1 - \cos^2 x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 1 - (1 - \operatorname{sen}^2 x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 1 - 1 + \operatorname{sen}^2 x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen}^2 x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cdot (\cos x - \operatorname{sen} x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0$ ou $\cos x - \operatorname{sen} x = 0$
$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0$ ou $\operatorname{sen} x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0$ ou $\operatorname{tg} x = 1$



A solução geral da equação é $x = n \cdot \pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot \pi$

Resposta: $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot \pi \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

61) Para $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, temos:

I) $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{cossec} x = 3$

II) $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9} \Rightarrow \cos x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

III) $$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

IV) $$A = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{cossec} x} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}}{1 - 3} =$$

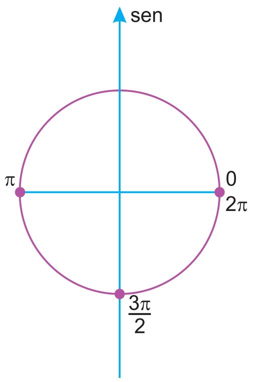
$$= \frac{\frac{2\sqrt{2}}{9} - \frac{\sqrt{2}}{4}}{-2} = \frac{\frac{8\sqrt{2} - 9\sqrt{2}}{36}}{-2} =$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{36} \cdot \frac{1}{-2} = \frac{\sqrt{2}}{72}$$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{2}}{72}$

62) $\text{sen}^2\, 2x + \text{sen}\, 2x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\, 2x \,.\, (\text{sen}\, 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\, 2x = 0$ ou $\text{sen}\, 2x = -1$



Para $0 \le x \le \pi \Leftrightarrow 0 \le 2x \le 2\pi$, tem-se:

I) $\text{sen}\, 2x = 0 \Rightarrow 2x = 0$ ou $2x = \pi$ ou $2x = 2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \pi$

II) $\text{sen}\, 2x = -1 \Rightarrow 2x = \dfrac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$

III) $V = \left\{0; \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{4}; \pi\right\}$, portanto, são 4 soluções para $x \in [0; \pi]$

Resposta: 4

63) Sendo x um arco do 2º quadrante e $\cos x = -\dfrac{3}{4}$, temos:

I) $\text{sen}^2x = 1 - \cos^2x = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16} \Rightarrow \text{sen}\, x = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

II) $\cos(\pi + x) = -\cos x = -\left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{4}$

III) $\cos(\pi + x) + \text{sen}\, x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{7}}{4} = \dfrac{\sqrt{7}+3}{4}$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{7}+3}{4}$

64) I) $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1 \Rightarrow (\text{sen}^2x + \cos^2x)^2 = 1^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}^4x + 2 \,.\, \text{sen}^2x \,.\, \cos^2x + \cos^4x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}^4x + \cos^4x = 1 - 2 \,.\, \text{sen}^2x \,.\, \cos^2x$

II) $\cos^4x + \text{sen}^4x - 2 \,.\, \text{sen}^2x \,.\, \cos^2x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 2 \,.\, \text{sen}^2x \,.\, \cos^2x - 2 \,.\, \text{sen}^2x \,.\, \cos^2x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4 \,.\, \text{sen}^2x \,.\, \cos^2x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2x = 0$ ou $\cos^2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\, x = 0$ ou $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = n \,.\, \dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

Resposta: $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = n \,.\, \dfrac{\pi}{2}, (n \in \mathbb{Z})\right\}$

65) I) $\begin{cases} \cos x + m \,.\, \text{sen}\, x = 0 \\ \cos x - m \,.\, \text{sen}\, x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \,.\, \cos x = 1 \\ 2m \,.\, \text{sen}\, x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen}\, x = -\dfrac{1}{2m} \end{cases}$

II) $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1 \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{2m}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4m^2} + \dfrac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow 1 + m^2 = 4m^2 \Leftrightarrow 3m^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} =$

$= \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \,.\, \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Resposta: $m = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

66) $\cos x - \text{sen}^2x = 1 \Leftrightarrow \cos x - (1 - \cos^2x) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2x + \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -2$ (impossível)

ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = n \,.\, 2\pi, n \in \mathbb{Z}$

Resposta: $\{x \in \mathbb{R} \mid x = n \,.\, 2\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

67) Para *x* dezenas de certo produto, o lucro L(x) em *milhares* de reais é obtido por L(x) = V(x) – C(x).

Para x = 3, resulta:

$L(3) = 3 \,.\, \sqrt{2} \,.\, \text{sen}\left(\dfrac{3 \,.\, \pi}{12}\right) - \left[2 - \cos\left(\dfrac{3 \,.\, \pi}{6}\right)\right] =$

$= 3 \,.\, \sqrt{2} \,.\, \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - 2 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3 \,.\, \sqrt{2} \,.\, \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2 + 0 =$

$= 3 - 2 = 1$

Portanto, o lucro, em reais, obtido na produção de 3 dezenas dessas peças é 1 000.

Resposta: C

68) A função $f(x) = 900 - 800 \,.\, \text{sen}\left(\dfrac{x \,.\, \pi}{12}\right)$, em que f(x) é o número de clientes, assume:

I) número máximo de clientes, quando

$\text{sen}\left(\dfrac{x \,.\, \pi}{12}\right) = -1$ (às 18 horas), igual a:

$f(18) = 900 - 800 \,.\, \text{sen}\left(\dfrac{18 \,.\, \pi}{12}\right) = 900 - 800 \,.\, (-1) = 1700$

II) número mínimo de clientes, quando

$\text{sen}\left(\dfrac{x \,.\, \pi}{12}\right) = 1$ (às 6 horas), igual a:

$$f(6) = 900 - 800 \,.\, \text{sen}\left(\frac{6 \,.\, \pi}{12}\right) = 900 - 800 = 100$$

Portanto, a diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a 1600.

Resposta: E

69) $2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

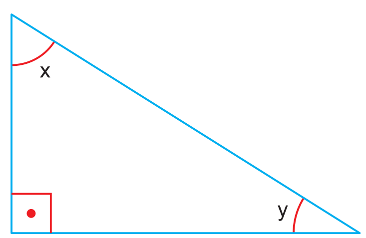
$\Rightarrow \frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{6} + n \,.\, 2\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + n \,.\, 4\pi, n \in \mathbb{Z}$

Para $x \in [-\pi; 4\pi]$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{11\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3}$

Resposta: C

70)



Se $x + y = 90°$, temos $\cos y = \text{sen } x$.

Então $\cos^2 x = 3\cos^2 y \Leftrightarrow \cos^2 x = 3\,\text{sen}^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = 3(1 - \cos^2 x) \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(x é agudo)**

Portanto: $x = 30°$, $y = 60°$ e $y - x = 30°$

Resposta: B

71) **Para $0 < z < 2\pi$, tem-se:**

$2\,\text{sen}^2 z + \text{sen } z - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen } z = -1$ ou $\text{sen } z = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{3\pi}{2}$ ou $z = \frac{\pi}{6}$ ou $z = \frac{5\pi}{6}$

Assim, a soma dos possíveis valores de z em radianos é

$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{2}$, **que corresponde a 450°.**

Resposta: E

72) **Lembrando que $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x, \forall x \in \mathbb{R}$, temos:**

$\text{sen}^2 x - \text{sen}(-x) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2 x + \text{sen } x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x = -1$ ou $\text{sen } x = 0$

Para $x \in [0;2\pi]$, temos:

$x = 0, x = \pi, x = \frac{3\pi}{2}$ ou $x = 2\pi$ e $0 + \pi + \frac{3\pi}{2} + 2\pi = \frac{9\pi}{2}$

Resposta: B

Módulo 7 – Adição e Subtração de Arcos – Arco Duplo

1) $\text{sen } 75° = \text{sen}(45° + 30°) = \text{sen } 45° \cos 30° + \text{sen } 30° \cos 45° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \,.\, \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Resposta: E

2) **Fazendo $x = \text{sen } 15° + \cos 15°$, temos:**

I) $x^2 = (\text{sen } 15° + \cos 15°)^2 =$

$= \text{sen}^2 15° + 2 \,.\, \text{sen } 15° \,.\, \cos 15° + \cos^2 15° =$

$= 1 + \text{sen } 30° = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

II) $x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \,.\, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, **pois $x > 0$**

Resposta: $\frac{\sqrt{6}}{2}$

3) $y = \text{sen } 105° - \cos 75° = \text{sen}(45° + 60°) - \cos(45° + 30°) =$

$= \text{sen } 45° \,.\, \cos 60° + \text{sen } 60° \,.\, \cos 45° -$

$- \cos 45° \,.\, \cos 30° + \text{sen } 45° \,.\, \text{sen } 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \,.\, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \,.\, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \,.\, \frac{1}{2} =$

$= 2 \,.\, \frac{\sqrt{2}}{2} \,.\, \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resposta: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) **Como** $\frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \,.\, \text{tg } b} = \text{tg}(a - b)$,

para $a = x + y$ e $b = y$ obtém-se

$\frac{\text{tg}(x + y) - \text{tg } y}{1 + \text{tg}(x + y).\, \text{tg } y} = \text{tg}(x + y - y) = \text{tg } x$

Resposta: tg x

5) I) $\begin{cases} \text{sen } y = \frac{3}{5} \\ 0 < y < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } y = \frac{3}{5} \\ \cos y = \frac{4}{5} \end{cases}$

II) $x + y = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - y \Rightarrow \text{sen } x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - y\right) =$

$= \text{sen } \frac{\pi}{4} \,.\, \cos y - \text{sen } y \,.\, \cos \frac{\pi}{4} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

6) $\begin{cases} tg\ (x+y) = 33 \\ tg\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{tg\ x + tg\ y}{1 - tg\ x\ .\ tg\ y} = 33 \Rightarrow \\ tg\ x = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{3 + tg\ y}{1 - 3\ tg\ y} = 33 \Leftrightarrow 3 + tg\ y = 33 - 99\ tg\ y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tg\ y + 99\ tg\ y = 33 - 3 \Leftrightarrow 100\ tg\ y = 30 \Leftrightarrow tg\ y = 0{,}3$

Resposta: B

7) I) $sen(x + y) + sen(x - y) = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow sen\ x\ .\ cos\ y + sen\ y\ .\ cos\ x +$
$+ sen\ x\ .\ cos\ y - sen\ x\ .\ cos\ y = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\ .\ sen\ x\ .\ cos\ y = 2 \Leftrightarrow sen\ x\ .\ cos\ y = 1$

II) $\begin{cases} sen(x + y) + sen(x - y) = 2 \\ sen\ x + cos\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sen\ x\ .\ cos\ y = 1 \\ sen\ x + cos\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} sen\ x = 1 \\ cos\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ y = 0 \end{cases}$, pois $0 \le x < 2\pi$ e $0 \le y < 2\pi$

Resposta: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)\right\}$

8) I) $sen\ 150° = sen\ 30° = \dfrac{1}{2}$

II) $E = sen(150° + a) + sen(150° - a) =$
$= sen\ 150°\ .\ cos\ a + sen\ a\ .\ cos\ 150° +$
$+ sen\ 150°\ .\ cos\ a - sen\ a\ .\ cos\ 150° =$
$= 2\ .\ sen\ 150°\ .\ cos\ a = 2\ .\ \dfrac{1}{2}\ .\ cos\ a = cos\ a$

Resposta: cos a

9) Se $cos\ x = \dfrac{3}{5}$, então:

$sen\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = sen\ \dfrac{\pi}{2}\ .\ cos\ x + sen\ x\ .\ cos\ \dfrac{\pi}{2} =$

$= 1\ .\ cos\ x + 0\ .\ sen\ x = cos\ x = \dfrac{3}{5}$

Resposta: $\dfrac{3}{5}$

10) I) $sen(-x) = sen(0 - x) = sen\ 0\ .\ cos\ x - sen\ x\ .\ cos\ 0 = -sen\ x$
II) $sen(\pi + x) = sen\ \pi\ .\ cos\ x + sen\ x\ .\ cos\ \pi = -sen\ x$
III) $sen\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = sen\ \dfrac{\pi}{2}\ .\ cos\ x - sen\ x\ .\ cos\ \dfrac{\pi}{2} = cos\ x$

IV) $E = sen(-x) + sen(\pi + x) - sen\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + cos\ x =$

$= -sen\ x + (-sen\ x) - cos\ x + cos\ x = -2\ .\ sen\ x$

Resposta: – 2 . sen x

11) I) $8\pi = 4\ .\ 2\pi + 0$
II) $10\pi = 5\ .\ 2\pi + 0$
III) $sen(8\pi - a) = sen(0 - a) = sen\ 0\ .\ cos\ a - sen\ a\ .\ cos\ 0 =$
$= -sen\ a$

IV) $cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = cos\ \dfrac{\pi}{2}\ .\ cos\ a + sen\ \dfrac{\pi}{2}\ .\ sen\ a = sen\ a$

V) $sec\ 10\pi = sec\ 0 = \dfrac{1}{cos\ 0} = \dfrac{1}{1} = 1$

VI) $sen(8\pi - a)\ .\ cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) + sec\ 10\pi = cos^n a \Rightarrow$

$\Rightarrow -sen\ a\ .\ sen\ a + 1 = cos^n a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -sen^2 a + 1 = cos^n a \Leftrightarrow 1 - sen^2 a = cos^n a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow cos^2 a = cos^n a \Leftrightarrow n = 2$

Resposta: n = 2

12) I) $cotg\ \alpha = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow tg\ \alpha = \dfrac{4}{3}$

II) $cotg\ \beta = \dfrac{1}{7} \Leftrightarrow tg\ \beta = 7$

III) $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ .\ tg\ \beta} = \dfrac{\dfrac{4}{3} + 7}{1 - \dfrac{4}{3}\ .\ 7} = \dfrac{\dfrac{25}{3}}{-\dfrac{25}{3}} = -1$

IV) $tg(\alpha + \beta) = -1 \Rightarrow \alpha + \beta = 135°$, pois α e β são agudos

Resposta: 135°

13) Lembrando que $cos\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $sen\ 30° = \dfrac{1}{2}$, tem-se:

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ .\ sen\ x + \dfrac{1}{2}\ .\ cos\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow cos\ 30°\ .\ sen\ x + sen\ 30°\ .\ cos\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sen\ (x + 30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 30° = 60° + n\ .\ 360°$ ou $x + 30° = 120° + n\ .\ 360°,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 30° + n\ .\ 360°$ ou $x = 90° + n\ .\ 360°,\ n \in \mathbb{Z}$

Resposta: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 30° + n\ .\ 360°$ ou
$x = 90° + n\ .\ 360°, n \in \mathbb{Z}\}$

14) I) $sen(\pi - x) = sen\ \pi\ .\ cos\ x - sen\ x\ .\ cos\ \pi = sen\ x$
II) $sen\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = sen\ \dfrac{3\pi}{2}\ .\ cos\ x + sen\ x\ .\ \dfrac{3\pi}{2} = -cos\ x$

III) Se $x = \dfrac{\pi}{5}$, tem-se:

$2\ .\ cos\ \pi\ .\ sen\ (\pi - x)\ .\ sen\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) =$

$= 2\ .\ (-1)\ .\ sen\ x\ .\ (-cos\ x) = 2\ .\ sen\ x\ .\ cos\ x = sen(2x) =$
$= sen\ \dfrac{2\pi}{5}$

Resposta: C

15) I) $\cos(90° + x) = -\operatorname{sen} x$

II) $\cos(180° - x) = -\cos x$

III) $\cos(360° - x) = \cos x$

IV) $\cos(90° - x) = \operatorname{sen} x$

V) $\operatorname{sen}(270° + x) = -\cos x$

VI) $\operatorname{sen}(90° + x) = \cos x$

VII) $\operatorname{sen}(360° + x) = \operatorname{sen} x$

VIII) $\dfrac{\cos(90°+x) + \cos(180°-x) + \cos(360°-x) + 3 \,.\, \cos(90°-x)}{\operatorname{sen}(270°+x) - \operatorname{sen}(90°+x) - \cos(90°-x) + \operatorname{sen}(360°+x)} =$

$= \dfrac{-\operatorname{sen} x - \cos x + \cos x + 3 \,.\, \operatorname{sen} x}{-\cos x - \cos x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x} =$

$= \dfrac{2 \,.\, \operatorname{sen} x}{-2 \,.\, \cos x} = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$

Resposta: $-\operatorname{tg} x$

16) Se $a + b = 30°$, então:

$(\cos a + \operatorname{sen} b)^2 + (\cos b + \operatorname{sen} a)^2 =$

$= \cos^2 a + 2 \,.\, \cos a \,.\, \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b +$

$+ 2 \,.\, \cos b \,.\, \operatorname{sen} a + \operatorname{sen}^2 a =$

$= 1 + 1 + 2 \,.\, (\operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a) =$

$= 2 + 2 \,.\, \operatorname{sen}(a + b) = 2 + 2 \,.\, \operatorname{sen} 30° = 2 + 2 \,.\, \dfrac{1}{2} = 2 + 1 = 3$

Resposta: E

17) Se $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{3}$ e $\operatorname{tg} y = \dfrac{1}{5}$, então:

$\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} y} = \dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{3} \,.\, \frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{2}{15}}{1 + \frac{1}{15}} =$

$= \dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{16}{15}} = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$

Resposta: D

18) I) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{15\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$

II) $\operatorname{cotg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{-\cos x}$

III) $\cos(180° + x) = -\cos x$

IV) $\sec(-x) = \dfrac{1}{\cos(-x)} = \dfrac{1}{\cos x}$

V) $y = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) . \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(180° + x) \,.\, \sec(-x)} =$

$= \dfrac{-\cos x \,.\, \frac{\operatorname{sen} x}{-\cos x}}{-\cos x \,.\, \frac{1}{\cos x}} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{-1} = -\operatorname{sen} x$

Resposta: B

19) I) $\cos(x + \pi) = -\cos x$

II) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

III) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

IV) $\cos(x + \pi) + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - \operatorname{tg}(-x) + \operatorname{cotg} x =$

$= -\cos x + \cos x - (-\operatorname{tg} x) + \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x =$

$= \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \,.\, \cos x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \,.\, \cos x} =$

$= \dfrac{2}{2 \,.\, \operatorname{sen} x \,.\, \cos x} = \dfrac{2}{\operatorname{sen}(2x)}$

Resposta: A

20) Se $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, então:

I) $\cos(2x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$

II) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

Resposta: D

21) I) $\begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \\ 90° < x < 180° \end{cases} \Rightarrow x = 150°$

II) $\cos(2x) = \cos 300° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

Resposta: C

22) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & \operatorname{sen} x \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 1 \\ 1 & 0 & \cos x \end{vmatrix} = 2 \,.\, \operatorname{sen} x \,.\, \cos x + 1 - \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x =$

$= \operatorname{sen}(2x) + 1 - (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \operatorname{sen}(2x) + 1 - 1 = \operatorname{sen}(2x)$

Resposta: B

23) I) $0 \le x \le \pi \Leftrightarrow 0 \le 2x \le 2\pi$

II) $2 \operatorname{sen} x \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $2x = \dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{\pi}{3}$

III) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi + 2\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$

Resposta: D

24) Para $\text{sen } a = \frac{4}{5}$, tem-se:

$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{9}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos a = \pm \frac{3}{5}$

a) $\text{sen } (2a) = 2 \,.\, \text{sen } a \,.\, \cos a = 2 \,.\, \frac{4}{5} \,.\, \left(\pm \frac{3}{5}\right) = \pm \frac{24}{25}$

b) $\cos (2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$

Respostas: a) $\pm \frac{24}{25}$; b) $-\frac{7}{25}$

25) I) $\text{sen } x = -1 \Rightarrow \cos x = 0$

II) $\text{sen}(2x) = 2 \,.\, \text{sen } x \,.\, \cos x = 2 \,.\, (-1) \,.\, 0 = 0$

Resposta: 0

26) Sendo $\cos x = \frac{3}{4}$ e observando que

$\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \,.\, \cos^2 x - 1$, tem-se:

I) $\cos(2x) = 2 \,.\, \cos^2 x - 1 = 2 \,.\, \frac{9}{16} - 1 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8}$

II) $\cos(4x) = 2 \,.\, \cos^2(2x) - 1 = 2 \,.\, \frac{1}{64} - 1 = \frac{1}{32} - 1 = -\frac{31}{32}$

Resposta: $-\frac{31}{32}$

27) $y = (\text{sen } x + \cos x)^2 = \text{sen}^2 x + 2 \,.\, \text{sen } x \,.\, \cos x + \cos^2 x =$

$= (\text{sen}^2 x + \cos^2 x) + (2 \,.\, \text{sen } x \,.\, \cos x) = 1 + \text{sen}(2x)$

Resposta: $1 + \text{sen}(2x)$

28) $y = (\text{sen } x + \cos x + 1) \,.\, (\text{sen } x + \cos x - 1) =$

$= (\text{sen } x + \cos x)^2 - 1^2 = \text{sen}^2 x + 2 \,.\, \text{sen } x \,.\, \cos x + \cos^2 x - 1 =$

$= 2 \,.\, \text{sen } x \,.\, \cos x = \text{sen}(2x)$

Resposta: C

29) $\text{sen } a - \cos a = \frac{1}{5} \Rightarrow (\text{sen } a - \cos a)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2 a - 2\text{sen } a \cos a + \cos^2 a = \frac{1}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \text{sen } (2a) = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{25} = \text{sen } (2a) \Leftrightarrow \text{sen } (2a) = \frac{24}{25}$

Resposta: B

30) $y = 3 + \text{sen } x \,.\, \cos x = 3 + \frac{1}{2} \,.\, 2 \text{ sen } x \cos x = 3 + \frac{1}{2} \text{ sen } (2x)$

Para $0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le 2x \le \pi$, temos:

$0 \le \text{sen } (2x) \le 1 \Leftrightarrow \frac{0}{2} \le \frac{1}{2} \text{ sen } (2x) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 + 3 \le 3 + \frac{1}{2} \text{ sen } (2x) \le \frac{1}{2} + 3 \Leftrightarrow 3 \le y \le \frac{7}{2}$

O maior valor que y pode assumir é, portanto, igual a $\frac{7}{2}$.

Resposta: D

31) $\text{sen } x = \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \text{sen } x \,.\, \cos x = 1 \text{ e } \cos x \ne 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \text{ sen } x \cos x = 2 \text{ e } \cos x \ne 0 \Leftrightarrow \text{sen } (2x) = 2$

A solução da equação proposta é $V = \varnothing$, pois $-1 \le \text{sen } (2x) \le 1$

Resposta: E

32) $2 \,.\, \cos (2x) - \cos x = 3 \Leftrightarrow 2 \,.\, (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) - \cos x = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \,.\, (2 \,.\, \cos^2 x - 1) - \cos x = 3 \Leftrightarrow 4 \,.\, \cos^2 x - 2 - \cos x = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \,.\, \cos^2 x - \cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1 \pm 9}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = -1$, pois $-1 \le \cos x \le 1$

Como $x \in \,]0; 5\pi[$, tem-se $x = \pi$ ou $x = 3\pi$

Resposta: $\{\pi; 3\pi\}$

33) Sendo $f(x) = \cos(2x)$ e $g(x) = \text{sen}^2 x - 1$, temos:

$f(x) + g(x) = \cos(2x) + \text{sen}^2 x - 1 =$

$= \cos^2 x - \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x - 1 = -\text{sen}^2 x + 1 - 1 = -\text{sen}^2 x$

Resposta: C

34) I) Sendo $\text{tg}(2x) = \frac{2 \,.\, \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$, fazendo $x = \frac{a}{2}$, temos:

$$\text{tg } a = \frac{2 \,.\, \text{tg}\left(\frac{a}{2}\right)}{1 - \text{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)}$$

II) Para $\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}$, temos:

$$\text{tg } a = \frac{2 \,.\, \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Resposta: A

35) I) $\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x = 1 - 2 \,.\, \text{sen}^2 x$

II) $\cos(2x) + 2 \,.\, \text{sen}^2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 2 \,.\, \text{sen}^2 x + 2 \,.\, \text{sen}^2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3 = 0$, assim, não existe x que satisfaça a equação.

Resposta: C

36) $\cos^2 x + 2 \,.\, \text{sen}^2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \text{sen}^2 x + 2 \,.\, \text{sen}^2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \text{sen}^2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2 x = -3$, assim, a equação não tem solução.

Resposta: nenhuma

37) I) $\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x = 3 \Leftrightarrow \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x} = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}\, x \,.\, \cos x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\text{sen}\, x \,.\, \cos x} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\, x \,.\, \cos x = \frac{1}{3}$$

II) $\text{sen}\,(2x) = 2 \,.\, \text{sen}\, x \,.\, \cos x = 2 \,.\, \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

Resposta: $\dfrac{2}{3}$

38) I) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{x}{2}\right) =$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) . \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) . \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= 0 \,.\, \cos\left(\frac{x}{2}\right) - (-1) \,.\, \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

II) Sendo $\cos(2a) = 1 - 2 \,.\, \text{sen}^2 a$, fazendo $a = \dfrac{x}{2}$, temos:

$$\cos x = 1 - 2 \,.\, \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

III) Para $\cos x = \dfrac{3}{5}$, temos:

$$\frac{3}{5} = 1 - 2 \,.\, \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow 2 \,.\, \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \,.\, \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$

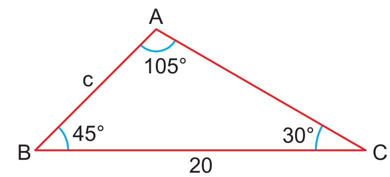
$$\Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Assim, $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Resposta: $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Módulo 8 – Lei dos Senos e dos Cossenos

1) De acordo com o enunciado, tem-se a figura a seguir:



I) $\text{sen}\, 105° = \text{sen}\,(60° + 45°) =$

$= \text{sen}\, 60° \,.\, \cos 45° + \text{sen}\, 45° \,.\, \cos 60° =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \,.\, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \,.\, \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

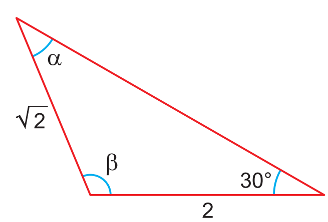
II) Pela lei dos senos, obtém-se:

$$\frac{20}{\text{sen}\, 105°} = \frac{c}{\text{sen}\, 30°} \Leftrightarrow \frac{20}{\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{c}{\dfrac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2c = \frac{80}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \Leftrightarrow c = \frac{40}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

Resposta: C

2)



I) Pela lei dos senos, tem-se:

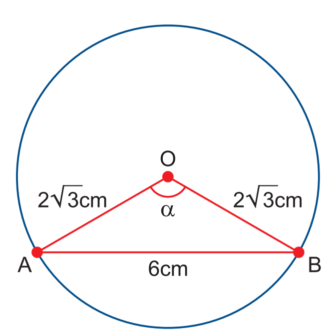
$$\frac{2}{\text{sen}\, \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\text{sen}\, 30°} \Leftrightarrow \frac{2}{\text{sen}\, \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\dfrac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\, \text{sen}\, \alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen}\, \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$$

II) $\begin{cases} \alpha + \beta + 30° = 180° \\ \alpha = 45° \end{cases} \Rightarrow 45° + \beta° + 30° = 180° \Leftrightarrow \beta = 105°$

Resposta: D

3)



Seja α a medida do ângulo $A\hat{O}B$ $(0 < \alpha < \pi)$.

Pela lei dos cossenos, temos:

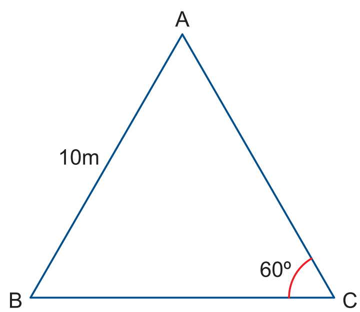
$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)\,(OB) \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 6^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \,.\, 2\sqrt{3} \,.\, 2\sqrt{3} \,.\, \cos \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos \alpha = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$

Resposta: B

4) De acordo com o enunciado, tem-se a figura a seguir:



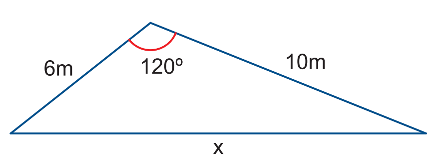
Sendo R, em metros, o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, pela lei dos senos, tem-se:

$\dfrac{AB}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R \Rightarrow \dfrac{10}{\text{sen}\,60°} = 2R \Leftrightarrow 2R \,.\, \text{sen}\,60° = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2R \,.\, \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10 \Leftrightarrow R = \dfrac{10}{\sqrt{3}} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

Resposta: $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ m

5) De acordo com o enunciado, tem-se a figura a seguir:



Sendo x, em metros, a medida do terceiro lado, pela lei dos cossenos, tem-se:

$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \,.\, 6 \,.\, 10 \,.\, \cos 120° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 36 + 100 - 2 \,.\, 6 \,.\, 10 \,.\, \left(-\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 36 + 100 + 60 \Leftrightarrow x^2 = 196 \Rightarrow x = 14$, pois $x > 0$

Resposta: 14 m

6) I) No triângulo BCP, pela lei dos senos, tem-se:

$\dfrac{BC}{\text{sen}\,135°} = \dfrac{PB}{\text{sen}\,30°} \Leftrightarrow BC \,.\, \text{sen}\,30° = PB \,.\, \text{sen}\,135° \Rightarrow$

$\Rightarrow BC \,.\, \dfrac{1}{2} = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \,.\, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow BC = \sqrt{12} - 2 = 2\sqrt{3} - 2 = 2(\sqrt{3} - 1)$

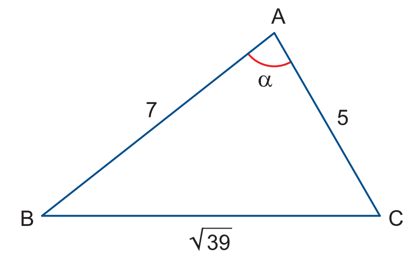
II) No triângulo ABC, tem-se:

$\text{sen}\,60° = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AB}{2(\sqrt{3} - 1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AB = \sqrt{3}\,(\sqrt{3} - 1) = 3 - \sqrt{3}$

Resposta: $3 - \sqrt{3}$

7) De acordo com o enunciado, tem-se a figura a seguir:



Sendo α a medida do ângulo $B\hat{A}C$, pela lei dos cossenos, tem-se:

$(\sqrt{39})^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, \cos \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 39 = 25 + 49 - 70 \,.\, \cos \alpha \Leftrightarrow 70 \,.\, \cos \alpha = 35 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos \alpha = \dfrac{35}{70} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$, pois $0° < \alpha < 180°$

Resposta: 60°

8) Sendo $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$ e $\alpha = 60°$ o ângulo formado pelos lados *a* e *b*, a área do triângulo é dada por:

$\dfrac{1}{2} \,.\, a \,.\, b \,.\, \text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{2} \,.\, 4 \,.\, 2\sqrt{3} \,.\, \text{sen}\,60° =$

$= \dfrac{1}{2} \,.\, 4 \,.\, 2\sqrt{3} \,.\, \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6$

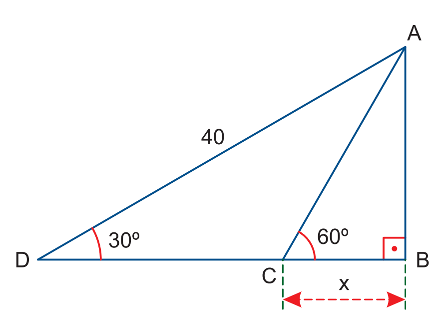
Resposta: 6

9) De acordo com a lei dos senos e sendo R o raio da circunferência que circunscreve o triângulo ABC, temos:

$\dfrac{AB}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R \Rightarrow 4\sqrt{2} = 2R \,.\, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow R = 4$

Resposta: 4

10)



I) No triângulo ABD, tem-se:

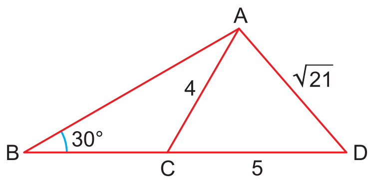
$$\text{sen } 30° = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{40} \Leftrightarrow AB = 20$$

II) No triângulo ABC, tem-se:

$$\text{tg } 60° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{20}{x} \Leftrightarrow x = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

Resposta: E

11)

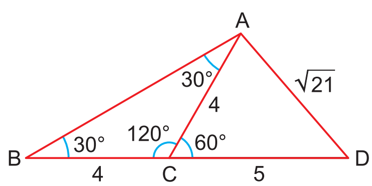


Utilizando a lei dos cossenos no triângulo ACD obtém-se:

$$(\sqrt{21})^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, \cos \hat{C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 21 = 25 + 16 - 40 \cos \hat{C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40 \cos \hat{C} = 20 \Leftrightarrow \cos \hat{C} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{C} = 60°, \text{ pois } 0° < \hat{C} < 180°$$



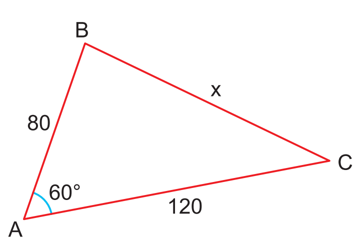
O triângulo ABC é isósceles, pois tem dois ângulos com medidas iguais a 30°. Os dois lados opostos a esses ângulos também têm medidas iguais e cada um mede 4.
A área do triângulo ABC é dada por:

$$\frac{1}{2} \,.\, AC \,.\, BC \,.\, \text{sen } A\hat{C}B =$$

$$= \frac{1}{2} \,.\, 4 \,.\, 4. \text{ sen } 120° = \frac{1}{2} \,.\, 4 \,.\, 4. \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Resposta: B

12)



A distância x, em km, entre B e C é tal que:

$$x^2 = 120^2 + 80^2 - 2 \,.\, 120 \,.\, 80 \,.\, \cos 60° \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 14\,400 + 6\,400 - 2 \,.\, 9\,600 \,.\, \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

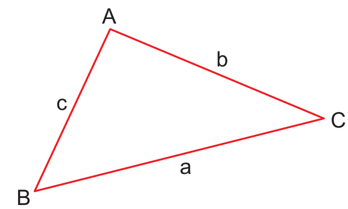
$$\Leftrightarrow x^2 = 20\,800 - 9\,600 \Leftrightarrow x^2 = 11\,200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{11200} = 10\sqrt{112}, \text{ pois } x > 0$$

$$10 < \sqrt{112} < 11 \Rightarrow 100 < 10 \,.\, \sqrt{112} < 110$$

Resposta: C

13)



I) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{C} = 180° - \hat{B}$

II) $\cos \hat{B} = -\cos (180° - \hat{B}) = -\cos (\hat{A} + \hat{C})$

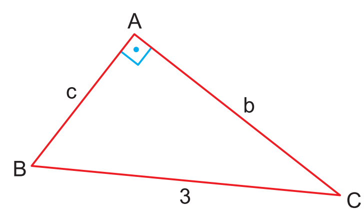
III) Pela lei dos cossenos, tem-se:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac[-\cos (\hat{A} + \hat{C})] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2 + 2ac \cos (\hat{A} + \hat{C})$$

Resposta: B

14)



I) $\begin{cases} \dfrac{c}{\text{sen } C} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \\ \text{sen } C = \dfrac{1}{2} \text{ sen } B \end{cases} \Rightarrow \dfrac{c}{\dfrac{1}{2} \text{ sen } B} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = 2c$

II) $b^2 + c^2 = 3^2 \Rightarrow (2c)^2 + c^2 = 9 \Leftrightarrow 4c^2 + c^2 = 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5c^2 = 9 \Leftrightarrow c^2 = \frac{9}{5} \Rightarrow c = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \text{ pois } c > 0$$

III) $b = 2c = 2 \,.\, \dfrac{3\sqrt{5}}{5} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

Resposta: $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ **e** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

15) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ac \,.\, \cos \hat{C} \Rightarrow$

$$\Rightarrow c^2 = 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \,.\, 4 \,.\, 3\sqrt{2} \,.\, \cos 45° \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 16 + 18 - 2 \,.\, 4 \,.\, 3\sqrt{2} \,.\, \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 16 + 18 - 24 \Leftrightarrow c^2 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}, \text{ pois } x > 0$$

Resposta: $\sqrt{10}$

16) a) $4^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18 \cos\alpha = 2 \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{9}$

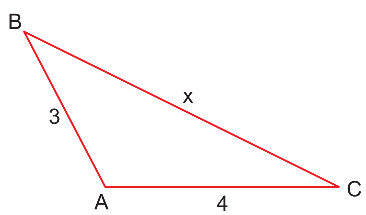
b) $\dfrac{AC}{\text{sen}\,\beta} = \dfrac{BC}{\text{sen}\,\alpha} \Rightarrow \dfrac{3}{\text{sen}\,60°} = \dfrac{4}{\text{sen}\,\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \cdot \text{sen}\,\alpha = 4 \cdot \text{sen}\,60° \Leftrightarrow 3 \cdot \text{sen}\,\alpha = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} > 1$, portanto, não existe α.

Respostas: a) $\cos\alpha = \dfrac{1}{9}$

b) Nas condições propostas, não existe o triângulo.

17) 

Sendo BC = x, tem-se:

$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos A \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 9 + 16 - 24 \cos\alpha \Leftrightarrow x^2 = 25 - 24 \cos\alpha$

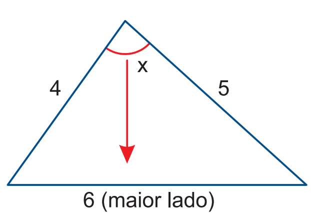
Se α é obtuso, isto é, $90° < \alpha < 180°$, então:

$-1 < \cos\alpha < 0 \Rightarrow 24 > -24 \cos\alpha > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < -24 \cos\alpha < 24 \Rightarrow 0 + 25 < 25 - 24 \cos\alpha < 24 + 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25 < x^2 < 49 \Rightarrow 5 < x < 7$

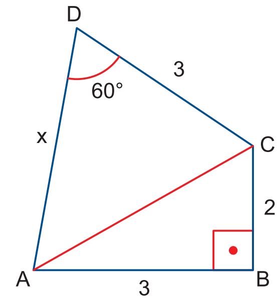
Resposta: D

18) 

$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos x \Leftrightarrow 36 = 16 + 25 - 40 \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 40 \cos x = 5 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{8}$

Resposta: E

19) 

I) No triângulo ABC tem-se: $(AC)^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow AC = \sqrt{13}$

II) No triângulo ACD tem-se: $(\sqrt{13})^2 = 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos 60° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$, pois $x > 0$

III) O perímetro, em centímetros, é 4 + 3 + 3 + 2 = 12

Resposta: B

FRENTE 3 – Geometria Plana e Analítica

■ Módulo 5 – Polígonos: Definição, Classificação e Propriedades

1) O icoságono tem 20 lados $\Rightarrow n = 20$

$d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{20(20-3)}{2} = 10 \cdot 17 = 170$

Resposta: D

2) Seja n o número de lados do polígono, então:

$n = \dfrac{d}{3} \Leftrightarrow 3n = d \Leftrightarrow 3n = \dfrac{n(n-3)}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6n = n^2 - 3n \Leftrightarrow n^2 - 3n - 6n = 0 \Leftrightarrow n^2 - 9n = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 9$, pois $n > 2$

Resposta: B

3) O decágono tem 10 lados $\Rightarrow n = 10$

$S_i = (n-2) \cdot 180° = (10-2) \cdot 180° = 8 \cdot 180° = 1440°$

Resposta: D

4) $a_e = \dfrac{360°}{10} = 36°$ e $a_i + a_e = 180°$, então:

$a_i = 180° - 36° = 144°$

Resposta: E

5) I) $a_i = 3a_e$ e $a_i + a_e = 180° \Leftrightarrow 3a_e + a_e = 180° \Leftrightarrow$

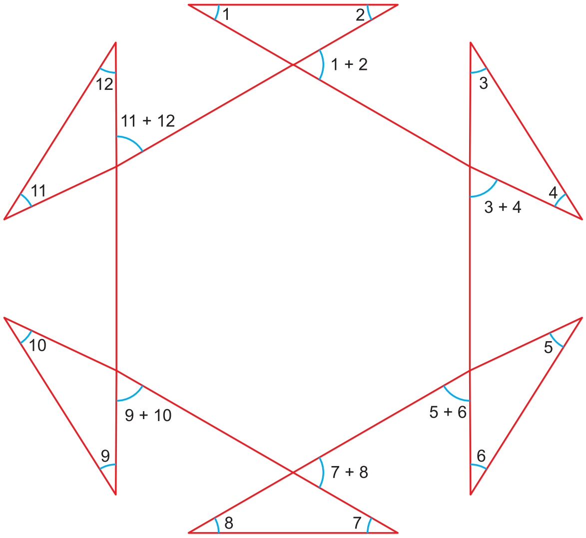
$\Leftrightarrow 4a_e = 180° \Leftrightarrow a_e = 45°$

II) $a_e = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow 45° = \dfrac{360°}{n} \Leftrightarrow 45°n = 360° \Leftrightarrow n = 8$

Logo, o polígono é o octógono.

Resposta: C

6)



A figura interna é um hexágono e $S_e = 360°$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 360°$

Resposta: B

7) I) $a_e = 20° = \dfrac{360°}{n} \Leftrightarrow 20° = \dfrac{360°}{n} \Leftrightarrow 2n = 36 \Leftrightarrow n = 18$

II) $d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{18(18-3)}{2} = 9 \,.\, 15 = 135$

Resposta: D

8) Polígono 1: n lados e d diagonais

Polígono 2: (n + 6) lados e (d + 39) diagonais

I) $\dfrac{(n+6)\,.\,(n+6-3)}{2} = \dfrac{n(n-3)}{2} + 39 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+6)\,.\,(n+3)}{2} = \dfrac{n(n-3)+78}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 + 3n + 6n + 18 = n^2 - 3n + 78 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n + 6n + 3n = 78 - 18 \Leftrightarrow 12n = 60 \Leftrightarrow n = 5$

II) $d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{5(5-3)}{2} = 5$

Então, temos:

Polígono 1: 5 lados e 5 diagonais

Polígono 2: 11 lados e 44 diagonais

Como o número de vértices é igual ao número de lados, a soma pedida é 5 + 5 + 11 + 44 = 65

Resposta: B

9) Sendo α o ângulo remanescente, temos:

I) $S_i = (n-2)\,.\,180° = 1900° + \alpha \Leftrightarrow 180°n - 360° = 1900° + \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = 180°n - 2260°$

II) $0° < \alpha < 180° \Leftrightarrow 0° < 180°n - 2260° < 180° \Leftrightarrow$

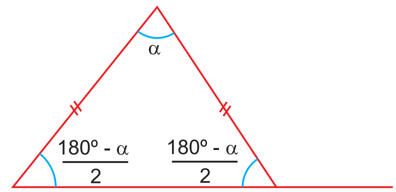
$\Leftrightarrow 2260° < 180°n < 2440° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2260°}{180°} < n < \dfrac{2440°}{180°} \Leftrightarrow 12{,}5 < n < 13{,}5 \Rightarrow n = 13$

III) $\alpha = 180°\,.\,13 - 2260° = 2340° - 2260° = 80°$

Resposta: D

10) Seja α o ângulo de cada vértice da estrela e o triângulo isósceles em cada ponta da estrela:



$\dfrac{180° - \alpha}{2}$ é ângulo externo do polígono de n lados, assim:

$\dfrac{180° - \alpha}{2} = \dfrac{360°}{n} \Leftrightarrow 720° = n\,.\,180° - n\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n\alpha = n\,.\,180° - 720° \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{(n-4)\,.\,180°}{n}$

Resposta: B

11) I) $S_i = (n-2)\,.\,180° = 2160° \Leftrightarrow n - 2 = \dfrac{216}{18} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 12 + 2 \Leftrightarrow n = 14$

II) $d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{14(14-3)}{2} = 7\,.\,11 = 77$ é o total de diagonais

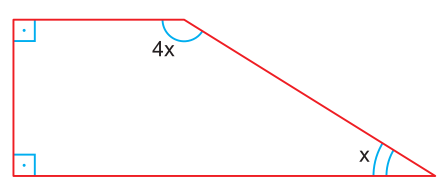
III) O número de diagonais que passam pelo centro é

$\dfrac{n}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$

IV) O número de diagonais que não passam pelo centro é $77 - 7 = 70$

Resposta: C

12)

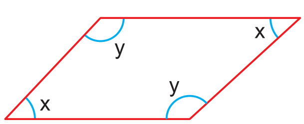


$4x + x + 90° + 90° = 360° \Leftrightarrow 5x = 360° - 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{180°}{5} = 36°$

Resposta: B

13)



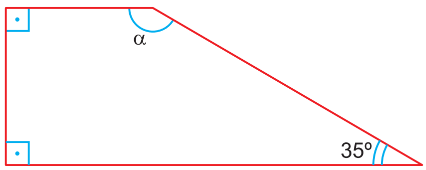
I) $x + x = 84° \Leftrightarrow 2x = 84° \Leftrightarrow x = 42°$

II) $x + y = 180° \Rightarrow y = 180° - 42° \Leftrightarrow y = 138°$

Logo, os ângulos medem: 42°, 138°, 42° e 138°.

Resposta: 42°, 138°, 42° e 138°

14)



$\alpha + 90° + 90° + 35° = 360° \Leftrightarrow \alpha = 360° - 90° - 90° - 35° = 145°$

Resposta: C

15) **Todo losango é um paralelogramo, pois tem lados opostos paralelos.**

Resposta: E

16) **I)** **O triângulo APB é isósceles, pois AB = AP, então** $A\hat{B}P = A\hat{P}B = \alpha$.

II) $P\hat{A}B = 90° - 60° = 30°$

III) **No triângulo APB, temos:**

$30° + \alpha + \alpha = 180° \Leftrightarrow 2\alpha = 150° \Leftrightarrow \alpha = 75°$

Resposta: E

17) **I)** **O triângulo CDE é isósceles, pois CD = CE, então** $C\hat{E}D = C\hat{D}E = \alpha$

II) $D\hat{C}E = 90° + 60° = 150°$

III) $\alpha + \alpha + 150° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 15°$

IV) **No triângulo CEF, temos:**

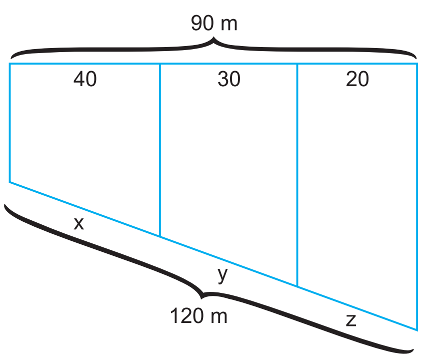
$60° + 15° + C\hat{F}E = 180° \Leftrightarrow C\hat{F}E = 105° = B\hat{F}D$

Resposta: 105°

18) $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \dfrac{4}{2} = \dfrac{8}{B'C'} \Leftrightarrow 4B'C' = 16 \Leftrightarrow B'C' = 4$

Resposta: 4 cm

19)



I) $\dfrac{40}{x} = \dfrac{90}{120} \Leftrightarrow 9x = 480 \Leftrightarrow x = \dfrac{160}{3}$

II) $\dfrac{30}{y} = \dfrac{90}{120} \Leftrightarrow 9y = 360 \Leftrightarrow y = 40$

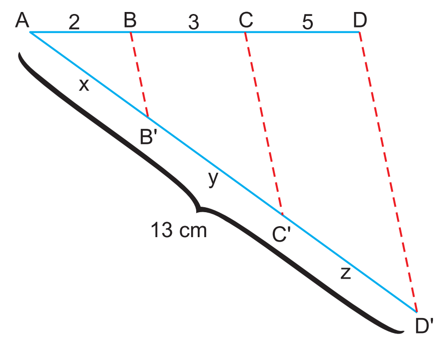
III) $\dfrac{20}{z} = \dfrac{90}{120} \Leftrightarrow 9z = 240 \Leftrightarrow z = \dfrac{80}{3}$

Resposta: $\dfrac{160}{3}$ **m, 40 m e** $\dfrac{80}{3}$ **m**

20) $\dfrac{x}{15} = \dfrac{6/5}{3} \Leftrightarrow 3x = 15 \cdot \dfrac{6}{5} \Leftrightarrow x = 6$

Resposta: E

21)



I) $\dfrac{2}{x} = \dfrac{10}{13} \Leftrightarrow 10x = 26 \Leftrightarrow x = 2,6 \Leftrightarrow AB' = 2,6$

II) $\dfrac{3}{y} = \dfrac{10}{13} \Leftrightarrow 10y = 39 \Leftrightarrow y = 3,9 \Leftrightarrow B'C' = 3,9$

III) $\dfrac{5}{z} = \dfrac{10}{13} \Leftrightarrow 10z = 65 \Leftrightarrow z = 6,5 \Leftrightarrow C'D' = 6,5$

Resposta: AB′ = 2,6 cm, B′C′ = 3,9 cm e C′D′ = 6,5 cm

22) $\dfrac{x+10}{x-18} = \dfrac{x+20}{x-16} \Leftrightarrow (x+10) \cdot (x-16) = (x-18)(x+20) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 10x - 160 = x^2 + 20x - 18x - 360 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x - 160 = 2x - 360 \Leftrightarrow 360 - 160 = 2x + 6x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 200 = 8x \Leftrightarrow x = 25$

Resposta: 25

Módulo 6 – Semelhança de Triângulos e Relações Métricas nos Triângulos Retângulos

1) $\Delta ABD \sim \Delta CBE \Rightarrow \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{BD}{BE} \Rightarrow \dfrac{1 + BE}{3} = \dfrac{10}{BE} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow BE + (BE)^2 = 30 \Leftrightarrow (BE)^2 + BE - 30 = 0 \Rightarrow BE = 5$

Resposta: D

2) $\Delta ABC \sim \Delta EDC \Rightarrow \dfrac{AB}{ED} = \dfrac{BC}{DC} \Rightarrow \dfrac{15}{x} = \dfrac{20}{15} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x = 45 \Leftrightarrow x = \dfrac{45}{4} \Leftrightarrow x = 11,25$

Resposta: D

3) Sendo x a medida do lado do quadrado, temos:

$\Delta BDE \sim \Delta BAC \Rightarrow \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{DE}{AC} \Rightarrow \dfrac{1-x}{1} = \dfrac{x}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3 - 3x \Leftrightarrow x + 3x = 3 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

Resposta: B

4) Sendo x, em metros, o comprimento da sombra da estátua, temos:

$\dfrac{5}{2} = \dfrac{4+x}{x} \Leftrightarrow 5x = 8 + 2x \Leftrightarrow 5x - 2x = 8 \Leftrightarrow 3x = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{8}{3}$

Resposta: $\dfrac{8}{3}$ m

5) Sendo x, em metros, a medida de $\overline{ED}$, pela semelhança dos triângulos AED e ABC, temos:

$\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{ED}{BC} \Rightarrow \dfrac{12}{20} = \dfrac{x}{10+x} \Leftrightarrow 5x = 30 + 3x \Leftrightarrow 5x - 3x = 30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 30 \Leftrightarrow x = 15$

Resposta: A

6) $\Delta ABE \sim \Delta CDE \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AE}{CE} \Rightarrow \dfrac{136}{50} = \dfrac{AE}{75} \Leftrightarrow 2AE = 408 \Leftrightarrow AE = 204$

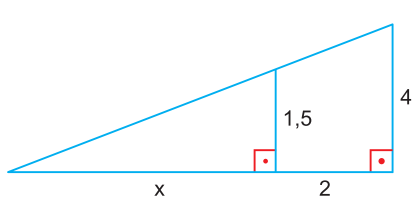
Resposta: C

7) Sendo x, em metros, a medida do raio do disco voador, então:

$\dfrac{30}{2x} = \dfrac{80}{16} \Leftrightarrow 16x = 48 \Leftrightarrow x = 3$

Resposta: A

8)



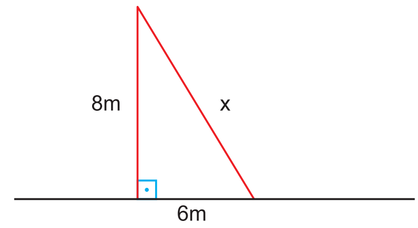
Sendo x, em metros, o comprimento da sombra da moça no chão, temos:

$\dfrac{4}{1{,}5} = \dfrac{x+2}{x} \Leftrightarrow 4x = 1{,}5x + 3 \Leftrightarrow 4x - 1{,}5x = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2{,}5x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2{,}5} \Leftrightarrow x = 1{,}20$

Resposta: B

9)



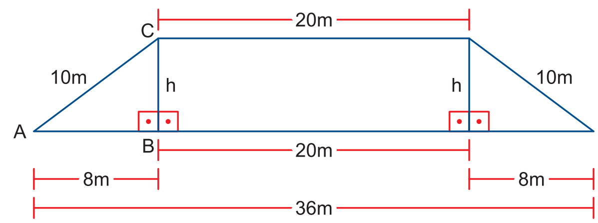
Sendo x o comprimento do cabo de energia, em metros, temos:

$x^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow x^2 = 36 + 64 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$

Resposta: D

10) Sendo x a medida, em metros, de cada lado não-paralelo do trapézio isósceles, temos:

$x + x = 20 \text{ m} \Leftrightarrow x = 10 \text{ m}$



No triângulo ABC, sendo h a medida em metros do trapézio, temos: $h^2 + (8 \text{ m})^2 = (10 \text{ m})^2 \Rightarrow h = 6 \text{ m}$

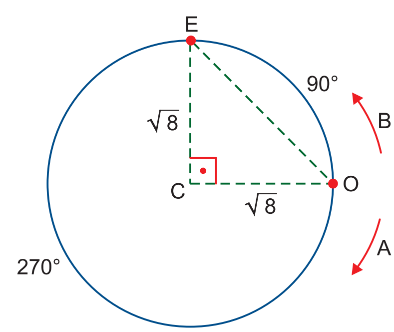
Resposta: A

11) De acordo com o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$r^2 = (r-5)^2 + 10^2 \Leftrightarrow 10r = 125 \Leftrightarrow r = 12{,}5$

Resposta: C

12)



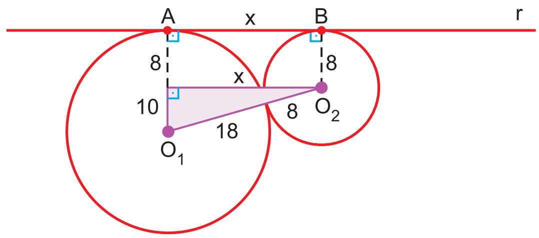
De acordo com o Teorema de Pitágoras, no triângulo retângulo OCE, tem-se: $(OE)^2 = (OC)^2 + (CE)^2$

Assim:

$(OE)^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2 \Leftrightarrow (OE)^2 = 8 + 8 \Leftrightarrow (OE)^2 = 16 \Rightarrow OE = 4$

Resposta: D

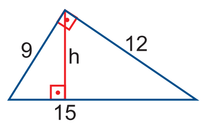
13) Fazendo AB = x, tem-se a figura a seguir:



$x^2 + 10^2 = 26^2 \Leftrightarrow x^2 + 100 = 676 \Leftrightarrow x^2 = 576 \Rightarrow x = 24$

Resposta: D

14)

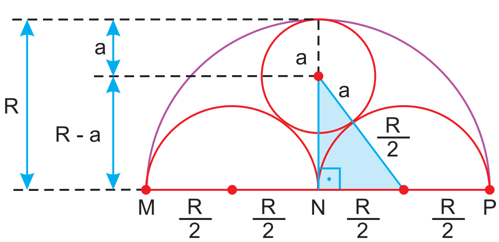


Utilizando a relação (HIP) . (ALT) = (CAT) . (CAT), temos:

$15 \,.\, h = 9 \,.\, 12 \Leftrightarrow h = \dfrac{36}{5} = 7{,}2$

Resposta: B

15)



Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo sombreado, tem-se:

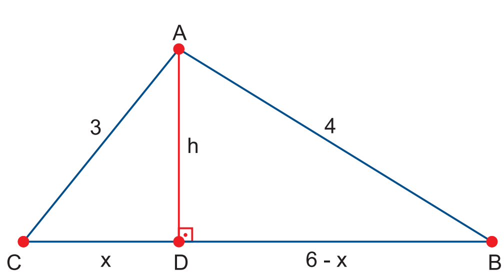
$$\left(a + \frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R - a)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + aR + \frac{R^2}{4} = \frac{R^2}{4} + R^2 - 2aR + a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow aR = R^2 - 2aR \Leftrightarrow 3aR = R^2 \Leftrightarrow 3a = R \Leftrightarrow a = \frac{R}{3}$$

Resposta: D

16)



Se h é altura do triângulo ACB relativa ao lado CB, e se x é a medida de CD, então:

I) No triângulo ADC, tem-se

$h^2 + x^2 = 3^2 \Leftrightarrow h^2 = 9 - x^2$

II) No triângulo ADB, tem-se

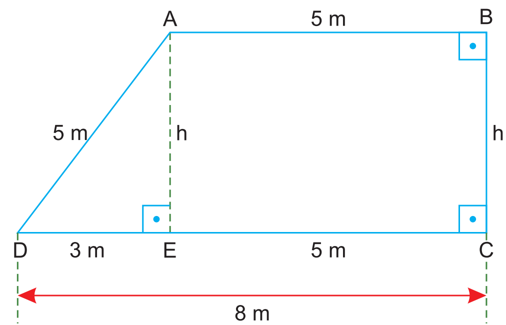
$h^2 + (6 - x)^2 = 4^2 \Leftrightarrow h^2 = 12x - 20 - x^2$

Logo, $12x - 20 - x^2 = 9 - x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{29}{12}$

Resposta: E

■ Módulo 7 – Área das Figuras Planas

1)



I) CE = AB = 5m ⇒ DE = 3 m

II) No triângulo ADE, tem-se:

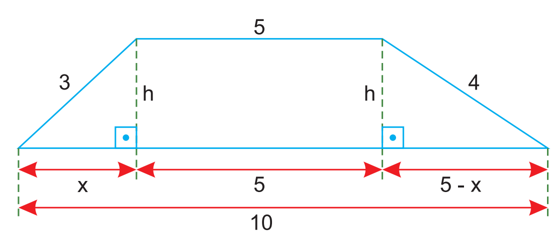
$(3\text{ m})^2 + h^2 = (5\text{ m})^2 \Rightarrow h = 4\text{ m}$

III) A área do trapézio é:

$$S = \frac{(AB + CD)\,.\,h}{2} = \frac{(5\text{ m} + 8\text{ m})\,.\,4\text{m}}{2} = 26\text{ m}^2$$

Resposta: A

2) Considerando as medidas em centímetros, tem-se:



I) $\begin{cases} x^2 + h^2 = 3^2 \\ (5 - x)^2 + h^2 = 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + h^2 = 9 \\ 25 - 10x + x^2 + h^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + h^2 = 9 \\ -10x + x^2 + h^2 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + h^2 = 9 \\ -10x + 9 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + h^2 = 9 \\ x = \dfrac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{81}{25} + h^2 = 9 \\ x = \dfrac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = 9 - \dfrac{81}{25} \\ x = \dfrac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = \dfrac{144}{25} \\ x = \dfrac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \dfrac{12}{5} \\ x = \dfrac{9}{5} \end{cases}$

II) A área do trapézio, em centímetros quadrados, é:

$$S = \frac{(10 + 5) \cdot \frac{12}{5}}{2} = \frac{15 \cdot \frac{12}{5}}{2} = \frac{3 \cdot 12}{2} = 18$$

Resposta: A

3) **I)** Sendo $S = 16\sqrt{3}\ m^2$ a área do triângulo equilátero de lado L, em metros, tem-se:

$$S = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow 16\sqrt{3} = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow L^2 = 64 \Rightarrow L = 8$$

II) A altura h, em metros, do triângulo equilátero, é dada por:

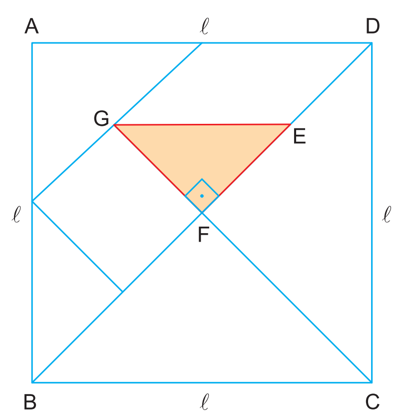
$$h = \frac{L \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{2} = 4 \cdot \sqrt{3}$$

III) Sendo A a área do quadrado, em metros quadrados, cuja diagonal, em metros, é $d = h = 4\sqrt{3}$, tem-se:

$$A = \frac{d^2}{2} = \frac{(4\sqrt{3})^2}{2} = \frac{16 \cdot 3}{2} = 24$$

Resposta: B

4)



I) A área do quadrado ABCD é 4 cm², assim, a medida do lado quadrado é $\ell = 2$ cm

II) $BD = \ell\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ cm é a diagonal do quadrado

III) $EF = FG = \frac{BD}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4}\ cm = \frac{\sqrt{2}}{2}\ cm$

IV) A área do triângulo EFG é dada por

$$\frac{EF \cdot FG}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\ cm^2 = \frac{\frac{2}{4}}{2}\ cm^2 =$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{2}\ cm^2 = \frac{1}{4}\ cm^2$$

Resposta: E

5) A área sombreada S corresponde à diferença entre a área de um quadrado de lado $\ell = 2$ e $\frac{1}{4}$ da área de um círculo de raio R = 2, assim:

$$S = \ell^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot R^2 = 2^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = 4 - \pi$$

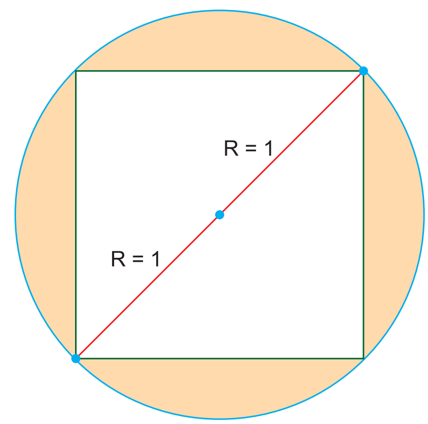
Resposta: A

6) A área S da coroa circular sombreada, em cm², corresponde à diferença entre a área do círculo maior, de raio 5 cm, e a do círculo menor, de raio 3 cm, assim:

$S = \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2 = 25\pi - 9\pi = 16\pi$

Resposta: C

7)



I) A diagonal do quadrado é $d = 2R = 2$

II) A área pedida S corresponde à diferença entre a área do círculo de raio R = 1 e a do quadrado de diagonal d = 2, assim:

$$S = \pi \cdot R^2 - \frac{d^2}{2} = \pi \cdot 1^2 - \frac{2^2}{2} = \pi - 2$$

Respostas: D

8) **I)** Se o lado do quadrado ABCD mede 2 cm, o raio do círculo, em centímetros, é $R = \frac{2}{2} = 1$

II) A diagonal do quadrado menor, em centímetros, é $d = 2R = 2$

III) A área pedida S, em centímetros quadrados, corresponde à diferença entre a área do círculo de raio R = 1 e a do quadrado de diagonal d = 2, assim:

$$S = \pi \cdot R^2 - \frac{d^2}{2} = \pi \cdot 1^2 - \frac{2^2}{2} = \pi - 2$$

Resposta: D

9) A área S da parte sombreada corresponde à área do quadrado menor, cuja diagonal mede d = 2a, assim:

$$S = \frac{d^2}{2} = \frac{(2a)^2}{2} = \frac{4a^2}{2} = 2a^2$$

Resposta: C

10) I) A área do quadrado ABCD, em cm^2, é $S_1 = 12^2 = 144$

II) $AE = AF = \frac{12}{3} = 4$, em cm.

III) A área do triângulo AEF, em cm^2, é

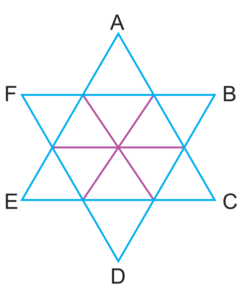
$$S_2 = \frac{AE \, . \, AF}{2} = \frac{4 \, . \, 4}{2} = 8$$

IV) A área S do octógono, em centímetros quadrados, é:

$S = S_1 - 4 \, . \, S_2 = 144 - 4 \, . \, 8 = 144 - 32 = 112$

Resposta: D

11)



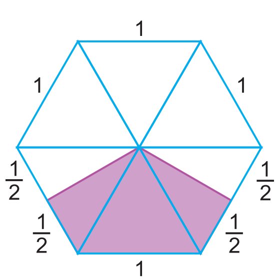
I) Se *a* é a área de cada um dos 6 triângulos equiláteros que formam o hexágono central de área k, então, k = 6a.

II) A soma das áreas dos triângulos ACE e BDF é

9a + 9a = 18a = 3 . 6a = 3k

Resposta: C

12)

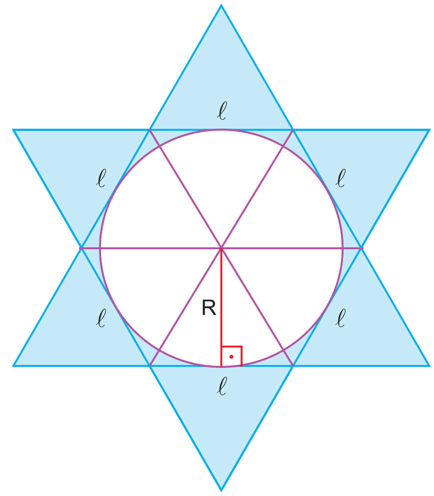


O pentágono hachurado tem área S correspondente a dois triângulos equiláteros de lado 1, assim, tem-se:

$$S = 2 \, . \, \frac{1^2 \, . \, \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resposta: E

13)



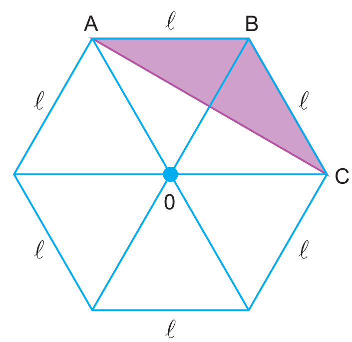
I) $\ell = 2 \Rightarrow R = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

II) $S = 12 \, . \, \frac{\ell^2 \, . \, \sqrt{3}}{4} - \pi \, . \, R^2 = 12 \, . \, \frac{2^2 \, . \, \sqrt{3}}{4} - 3 \, . \, (\sqrt{3})^2 =$

$= 12 \, . \, \sqrt{3} - 3 \, . \, 3 = 3 \, . \, (4 \, . \, \sqrt{3} - 3)$

Resposta: B

14)

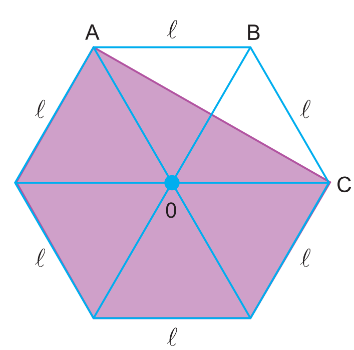


I) $S_{HEX} = 6 \, . \, S_{OAB} \Rightarrow 6 = 6 \, . \, S_{OAB} \Leftrightarrow S_{OAB} = 1$

II) $S_{ABC} = \frac{S_{OAB} + S_{OBC}}{2} = \frac{2 \, . \, S_{OAB}}{2} = S_{OAB} = 1$

Resposta: A

15)



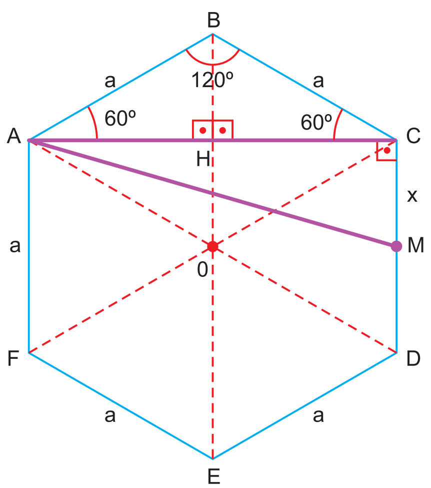
I) $S_{HEX} = 6 \,.\, S_{OAB} \Rightarrow 2 = 6 \,.\, S_{OAB} \Leftrightarrow S_{OAB} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

II) $S_{ABC} = \dfrac{S_{OAB} + S_{OBC}}{2} = \dfrac{2 \,.\, S_{OAB}}{2} = S_{OAB} = \dfrac{1}{3}$

III) $S_{PENT} = S_{HEX} - S_{ABC} = 2 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$

Resposta: E

16)



I) $AH = HC = \dfrac{a \,.\, \sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 2 \,.\, \dfrac{a \,.\, \sqrt{3}}{2} = a \,.\, \sqrt{3}$

II) $S_{ABC} = \dfrac{S_{OAB} + S_{OBC}}{2} = \dfrac{2 \,.\, S_{OAB}}{2} = S_{OAB} = \dfrac{a^2 \,.\, \sqrt{3}}{4}$

III) $S_{ACM} = \dfrac{x \,.\, AC}{2} = \dfrac{x \,.\, a \,.\, \sqrt{3}}{2}$

IV) $S_{ABCM} = \dfrac{1}{4} \,.\, S_{HEX} \Rightarrow S_{ABC} + S_{ACM} = \dfrac{1}{4} \,.\, S_{HEX} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{a^2 \,.\, \sqrt{3}}{4} + \dfrac{x \,.\, a \,.\, \sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{4} \,.\, 6 \,.\, \dfrac{a^2 \,.\, \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{4} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{3a}{8} \Leftrightarrow 2a + 4x = 3a \Leftrightarrow 4x = a \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{4}$

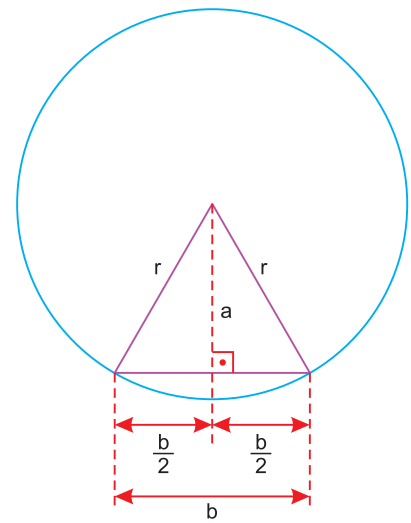
V) Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACM, temos:

$(AM)^2 = (AC)^2 + x^2 = (a \,.\, \sqrt{3})^2 + \left(\dfrac{a}{4}\right)^2 = 3a^2 + \dfrac{a^2}{16} = \dfrac{49a^2}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = \dfrac{7a}{4}$

Resposta: B

17) I) **O polígono regular de n lados é formado por n triângulos isósceles congruentes, como o da figura a seguir:**



II) **Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:**

$\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + a^2 = r^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = r^2 - a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{b}{2} = \sqrt{r^2 - a^2} \Leftrightarrow b = 2 \,.\, \sqrt{r^2 - a^2}$

III) **A área do polígono de n lados é dada por**

$n \,.\, \dfrac{b \,.\, a}{2} = n \,.\, \dfrac{2 \,.\, \sqrt{r^2 - a^2} \,.\, a}{2} = na\sqrt{r^2 - a^2}$

Resposta: C

18) **Sendo R o raio do círculo maior (figura I) e r o raio de cada círculo menor (figura II), tem-se:**

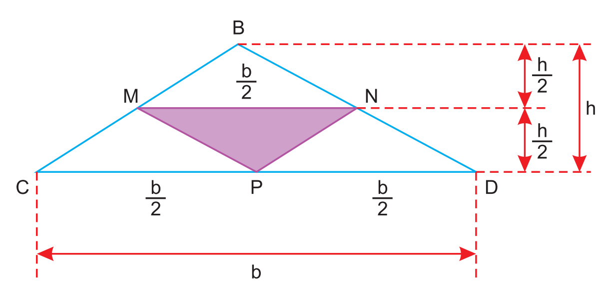
I) $2 \,.\, \pi \,.\, R = 3 \,.\, 2 \,.\, \pi \,.\, r \Leftrightarrow R = 3 \,.\, r$

II) $s = \pi \,.\, r^2$

III) $S = \pi \,.\, R^2 = \pi \,.\, (3 \,.\, r)^2 = \pi \,.\, 9 \,.\, r^2 = 9 \,.\, \pi \,.\, r^2 = 9 \,.\, s$

Resposta: E

19)



I) $\begin{cases} \text{M é ponto médio de } \overline{BC} \\ \text{N é ponto médio de } \overline{BD} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{MN} \,//\, \overline{CD} \text{ e } MN = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{b}{2}$

II) A área do triângulo BCD é $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

III) A área do triângulo MNP é $\dfrac{MN \cdot \dfrac{h}{2}}{2} = \dfrac{\dfrac{b}{2} \cdot \dfrac{h}{2}}{2} =$

$$= \frac{\dfrac{b \cdot h}{4}}{2} = \frac{b \cdot h}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{4} \cdot A$$

Resposta: C

20) I) $S_{ABC} = 2 \cdot S_{ADE} \Leftrightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = 2$

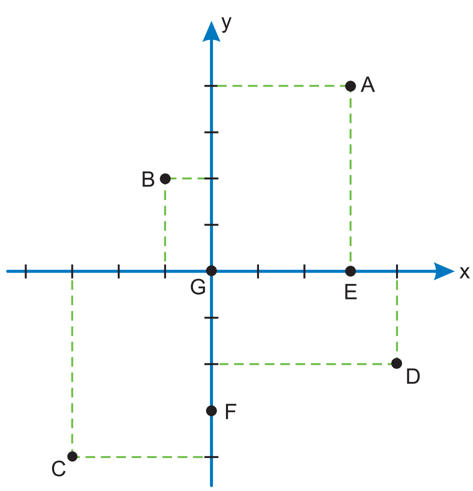
II) Se a razão de semelhança entre duas figuras semelhantes é k, a razão entre as áreas dessas figuras é k^2, então:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \left(\frac{BC}{DE}\right)^2 \Rightarrow 2 = \left(\frac{BC}{DE}\right)^2 \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \sqrt{2}$$

Resposta: D

■ Módulo 8 – Coordenadas Cartesianas Ortogonais, Razão de Secção, Alinhamento de Três Pontos e Curvas

1)



2) Para que os pontos A(a; 3) e B(– 2; b) sejam coincidentes, os pares ordenados devem ser iguais, portanto,
(a; 3) = (– 2; b) ⇔ a = – 2 e b = 3
Resposta: a = – 2 e b = 3

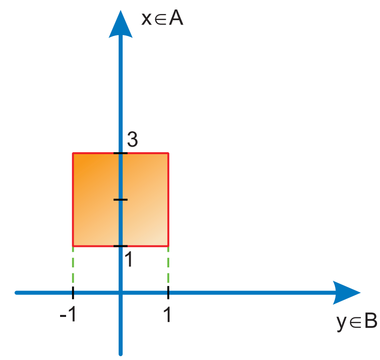
3) a) b = 0; b) a = 0;
c) a > 0 e b < 0; d) a = – b

4) Se a < 0 e b > 0, então:
I) P(a; – b) pertence ao 3º quadrante, pois a < 0 e – b < 0
II) Q(b; – a) pertence ao 1º quadrante, pois b > 0 e – a > 0
Resposta: D

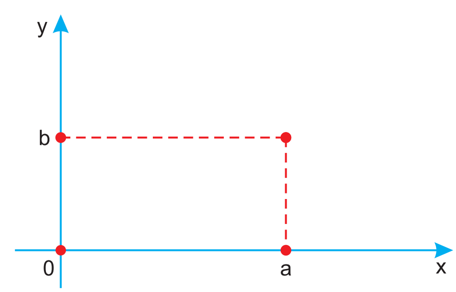
5) I) Se o ponto A(a – 3; 5) pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, então, a – 3 = 5 ⇔ a = 8
II) Se o ponto B(4; 2b) pertence à bissetriz dos quadrantes pares, então, 4 = – 2b ⇔ b = – 2
Resposta: a = 8 e b = – 2

6) a) reta paralela ao eixo das ordenadas (eixo y)
b) reta paralela ao eixo das abscissas (eixo x)

7)



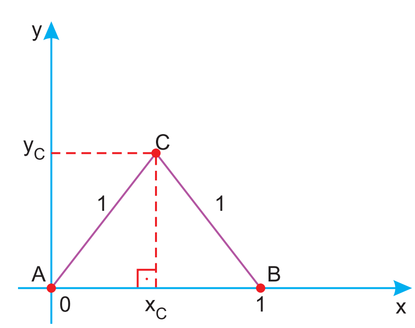
8) Representando graficamente os pontos (0; 0), (a; 0), (a; b) e (0; b), com a > b > 0, tem-se:



Ligando os pontos, na ordem dada, por linhas retas, forma-se um retângulo de área a . b, cujo centro é o ponto $\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{b}{2}\right)$

Resposta: retângulo; (a . b) u.a.; $\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{b}{2}\right)$

9) De acordo com o enunciado, tem-se a figura a seguir.



Sendo $\ell = 1$ a medida do lado do triângulo equilátero ABC, tem-se, para o vértice C:

I) $x_C = \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{1}{2}$

II) $y_C = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Resposta: B

10) **Observando que o quadrilátero da figura é um paralelogramo de base b = 4 e altura h = 5, sua área é dada por b . h = 4 . 5 = 20, em unidades de área.**
Resposta: C

11) **1) É falsa, pois pontos de abscissa nula estão no eixo Oy.**
2) É verdadeira.
3) É verdadeira.
4) É verdadeira.
5) É falsa, pois os pontos da bissetriz dos quadrantes pares são do tipo (a; – a)
Resposta: 2, 3 e 4

12) $AB = \sqrt{(5-4)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$AC = \sqrt{(0-4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$AD = \sqrt{(2-4)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$BE = \sqrt{(-4-5)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{81+4} = \sqrt{85}$

$BF = |\,5 - 0\,| = 5$

$CD = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$

$CG = \sqrt{(-6-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{36+64} = 10$

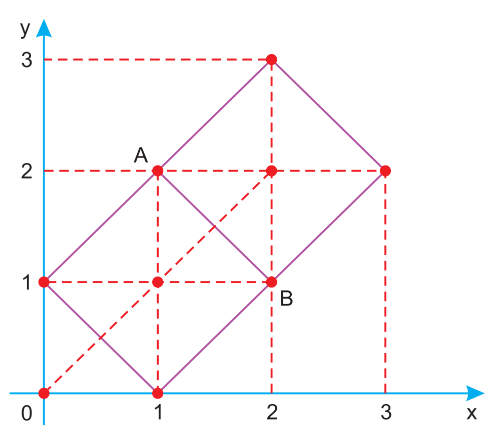
$DE = \sqrt{(-4-2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$

$EF = \sqrt{(0+4)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Resposta: $AB = \sqrt{10}$; $AC = \sqrt{17}$; $AD = 2\sqrt{10}$; $BE = \sqrt{85}$;

$BF = 5$; $CD = \sqrt{53}$; $CG = 10$; $DE = \sqrt{61}$; $EF = 2\sqrt{5}$

13) **De acordo com o enunciado, temos a figura a seguir:**



Existem duas possibilidades para o quadrado ABCD, assim, tem-se:

I) **Se o centro do quadrado for o ponto (1; 1), a distância à origem (0; 0) é** $\sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

II) **Se o centro do quadrado for o ponto (2; 2), a distância à origem (0; 0) é** $\sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Resposta: E

14) **Sendo P(x; – 8), Q(3; 0) e PQ = 8, tem-se:**

$PQ = \sqrt{(x-3)^2 + (-8-0)^2} \Rightarrow 8 = \sqrt{(x-3)^2 + 64} \Rightarrow$

$\Rightarrow 64 = (x-3)^2 + 64 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Resposta: C

15) **Se P(–1; a) pertence ao 2º quadrante, então a > 0, assim, sendo Q(a; – 2) e PQ = 5, tem-se:**

$PQ = \sqrt{(a+1)^2 + (a+2)^2} = 5 \Rightarrow (a+1)^2 + (a+2)^2 = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 = 25 \Leftrightarrow 2a^2 + 6a - 20 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + 3a - 10 = 0 \Leftrightarrow a - 5$ ou $a = 2 \Rightarrow a = 2$, pois $a > 0$

Resposta: E

16) **Para os pontos A(3; 4), B(– 2; 4) e C(2; 2), tem-se:**

I) $AB = \sqrt{(3+2)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

II) $AC = \sqrt{(3-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

III) $BC = \sqrt{(2+2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

V) **O perímetro do triângulo ABC é AB + AC + BC =**
$= 5 + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5 + 3\sqrt{5}$

Resposta: $5 + 3\sqrt{5}$

17) **Para os pontos A(5; 10), B(11; 2) e C(8; 11), tem-se:**

I) $AB = \sqrt{(11-5)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

II) $AC = \sqrt{(8-5)^2 + (11-10)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

III) $BC = \sqrt{(11-8)^2 + (11-2)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90}$

IV) **Como** $AB^2 = AC^2 + BC^2$**, tem-se que o triângulo ABC é retângulo com catetos AC e BC, assim, sua área é da por**

$$\frac{AC \,.\, BC}{2} = \frac{\sqrt{10} \,.\, \sqrt{90}}{2} = \frac{\sqrt{10} \,.\, 3\sqrt{10}}{2} = \frac{3 \,.\, 10}{2} = 15$$

Respostas: Triângulo retângulo; 15u.a.

18) **Para os pontos A(0; 1), B(3; 5), C(7; 2) e D(4; – 2), tem-se:**

I) $AB = \sqrt{(3-0)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

II) $BC = \sqrt{(7-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

III) $CD = \sqrt{(7-4)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

IV) $DA = \sqrt{(4-0)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

V) $AC = \sqrt{(7-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$

VI) $BD = \sqrt{(4-3)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}$

VII) **Como AB = BC = CD = DA (lados congruentes) e AC = BD (diagonais congruentes), tem-se que o quadrilátero ABCD é um quadrado.**

Resposta: Quadrado

19) Para os pontos A(2; – 2), B(– 3; – 1) e C(1; 6), tem-se:

I) $D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 18 + 1 - 12 + 6 = -27 \neq 0$,

assim, os pontos A, B e C não estão alinhados, portanto, são vértices de um triângulo.

II) $AB = \sqrt{(2+3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

III) $AC = \sqrt{(2-1)^2 + (6+2)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

IV) $BC = \sqrt{(1+3)^2 + (6+1)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

V) Como $AC = BC \neq AB$, tem-se que o triângulo ABC é isósceles e não equilátero.

Resposta: C

20) Para A(– 3; 6) e P(3; y), tem-se:

$AP = 10 \Rightarrow \sqrt{(3+3)^2 + (y-6)^2} = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{36 + (y-6)^2} = 10 \Rightarrow 36 + (y-6)^2 = 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-6)^2 = 64 \Leftrightarrow y - 6 = -8$ ou $y - 6 = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -2$ ou $y = 14 \Rightarrow P(3; -2)$ ou $P(3; 14)$

Resposta: P(3; – 2) ou P(3; 14)

21) Se P(x; y) é o ponto equidistante da origem O(0; 0) e dos pontos A(1; 0) e B(0; 3), então:

$$\begin{cases} PB = PO \\ PA = PO \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + y^2 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6y + 9 = 0 \\ -2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y = 9 \\ 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{2} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Resposta: $P\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

22) Se P(x; y) é o ponto equidistante dos pontos A(0; 0), B(1; 7) e C(7; – 1), então:

$$\begin{cases} PA = PB \\ PA = PC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+1)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 14y + 49 \\ x^2 + y^2 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 14y = 50 \\ 14x - 2y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y = 25 \\ 7x - y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y = 25 \\ 49x - 7y = 175 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y = 25 \\ 50x = 200 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow P(4; 3)$$

Resposta: P(4; 3)

23) Sendo M o ponto médio de AB e, sendo d, a distância entre o portão e o ponto médio de AB, temos:

$M = \left(\dfrac{2+4}{2}; \dfrac{2+8}{2}\right) = (3;5)$ e $d = \sqrt{(3-3)^2 + (9-5)^2} = 4$

Resposta: D

24) Se M(2; 3) é o ponto médio do segmento AB com A(5; 2) e $B(x_B; y_B)$, então:

$$\begin{cases} \dfrac{5 + x_B}{2} = 2 \\ \dfrac{2 + y_B}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -1 \\ y_B = 4 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 4)$$

Resposta: E

25) Se (2; 5) é o ponto médio do segmento de extremos (5; y) e (x; 7), então:

$$\begin{cases} \dfrac{5 + x}{2} = 2 \\ \dfrac{y + 7}{2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow x + y = -1 + 3 = 2$$

Resposta: B

26) O centro C(– 4; 1) da circunferência é o ponto médio do diâmetro de extremos P(2; 6) e $Q(x_Q; y_Q)$, então:

$$\begin{cases} \dfrac{2 + x_Q}{2} = -4 \\ \dfrac{6 + y_Q}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = -10 \\ y_Q = -4 \end{cases} \Rightarrow Q(-10; -4)$$

Resposta: Q(– 10; – 4)

27) No triângulo de vértices A(3; 8), B(2; – 1) e C(6; – 3), tem-se:

I) O ponto médio do lado BC é $M\left(\dfrac{2+6}{2}; \dfrac{-1-3}{2}\right) = M(4; -2)$

II) O comprimento da mediana AM é dado por

$AM = \sqrt{(3-4)^2 + (8+2)^2} = \sqrt{1+100} = \sqrt{101}$

Resposta: E

28) No triângulo de vértices A(1; 1), B(3; – 4) e C(– 5; 2), tem-se:

I) O ponto médio do lado AC é

$M\left(\dfrac{1-5}{2}; \dfrac{1+2}{2}\right) = M\left(-2; \dfrac{3}{2}\right)$

II) O comprimento da mediana BM é dado por

$$BM = \sqrt{(3+2)^2 + \left(-4 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{121}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{221}{4}} = \frac{\sqrt{221}}{2}$$

Resposta: D

29) No triângulo de vértices A(0; 0), B(3; 7) e C(5; – 1), tem-se:

I) O ponto médio do lado BC é $M\left(\frac{3+5}{2}; \frac{7-1}{2}\right) = M(4; 3)$

II) O comprimento da mediana AM é dado por

$$AM = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Resposta: AM = 5

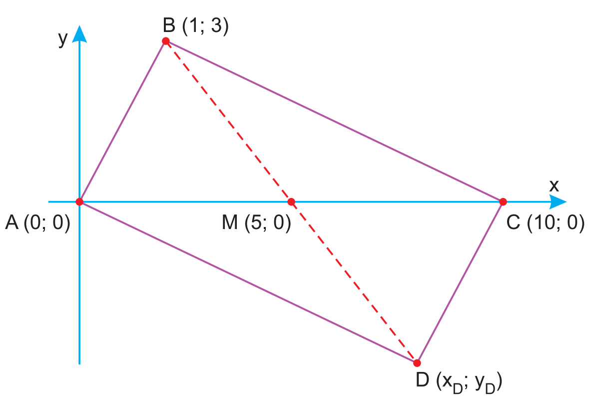
30) Sendo A(– 3; 5), B(1; 7), $C(x_C; y_C)$ e $D(x_D; y_D)$ os vértices de um paralelogramo e sendo P(1; 1) o ponto médio das diagonais, tem-se:

I) $$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_C}{2} = x_P \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} = y_P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3 + x_C}{2} = 1 \\ \dfrac{5 + y_C}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 5 \\ y_C = -3 \end{cases} \Rightarrow C(5; -3)$$

II) $$\begin{cases} \dfrac{x_B + x_D}{2} = x_P \\ \dfrac{y_B + y_D}{2} = y_P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 + x_D}{2} = 1 \\ \dfrac{7 + y_D}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = -5 \end{cases} \Rightarrow D(1; -5)$$

Resposta: (5; – 3) e (1; – 5)

31) Representando os pontos dados num sistema cartesiano, tem-se a figura a seguir.



O ponto médio da diagonal $\overline{AC}$ é M(5; 0) que coincide com o ponto médio da diagonal $\overline{BD}$, assim:

$$\begin{cases} \dfrac{x_B + x_D}{2} = x_M \\ \dfrac{y_B + y_D}{2} = y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 + x_D}{2} = 5 \\ \dfrac{3 + y_D}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 9 \\ y_D = -3 \end{cases} \Rightarrow D(9; -3)$$

Resposta: A

32) Para os pontos A(4; – 1), B(8; 1) e C(– 2; – 4), tem-se:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 32 + 2 + 8 + 16 = 0, \text{ assim, os}$$

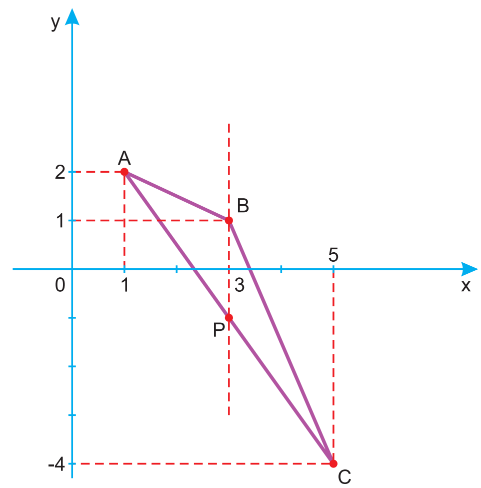
pontos A, B e C são alinhados.
Resposta: Sim

33) Para os pontos A(– 3; – 2), B(5; 2) e C(9; 4), tem-se:

$$D = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 18 + 20 - 18 + 12 + 10 = 0, \text{ assim, os}$$

pontos A, B e C são colineares.
Resposta: A

34) Representando os pontos dados num sistema cartesiano, tem-se a figura a seguir:



Se o ponto P(3; m) pertence a um dos lados do triângulo ABC, observa-se que esse lado é $\overline{AC}$, assim, A, P e C devem estar alinhados, portanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & m & 1 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m + 10 - 12 - 5m + 4 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4m = 4 \Leftrightarrow m = -1$$

Resposta: A

35) Para que os pontos A(0; a), B(a; – 4) e C(1; 2) sejam vértices de um triângulo, deve-se ter:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ a & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a + 2a + 4 - a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a^2 - 3a - 4 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \neq -1 \text{ e } a \neq 4$$

Resposta: D

36) I) $P(x_0; y_0)$, A(– 1; – 2) e B(2; 1) estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x_0 + 2y_0 - 1 + 4 - x_0 + y_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x_0 + 3y_0 + 3 = 0$$

II) $P(x_0; y_0)$, $C(-2; 1)$ e $D(1; -4)$ estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_0 + y_0 + 8 - 1 + 4x_0 + 2y_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 5x_0 + 3y_0 + 7 = 0$

III) $$\begin{cases} -3x_0 + 3y_0 + 3 = 0 \\ 5x_0 + 3y_0 + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 - 3y_0 - 3 = 0 \\ 5x_0 + 3y_0 + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 - 1 = 0 \\ 8x_0 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 - 1 = 0 \\ x_0 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -\dfrac{3}{2} \\ x_0 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$$

Resposta: $P\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

37) Para os pontos $A(0; 2)$, $B(4; 0)$ e $C(-1; -2)$, tem-se:

I) $D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 8 - 8 = -18$

II) A área do triângulo ABC é dada por

$S = \frac{|D|}{2} = \frac{|-18|}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Resposta: C

38) I) Se B é o ponto em que a reta $x + y = 1$ encontra o eixo x, então $y_B = 0$, logo, $x_B + 0 = 1 \Leftrightarrow x_B = 1$, portanto, $B(1; 0)$

II) Se C é o ponto em que a reta $x + y = 1$ encontra o eixo y, então $x_C = 0$, logo, $0 + y_C = 1 \Leftrightarrow y_C = 1$, portanto, $C(0; 1)$

III) Para os pontos $A(3; 4)$, $B(1; 0)$ e $C(0; 1)$, tem-se:

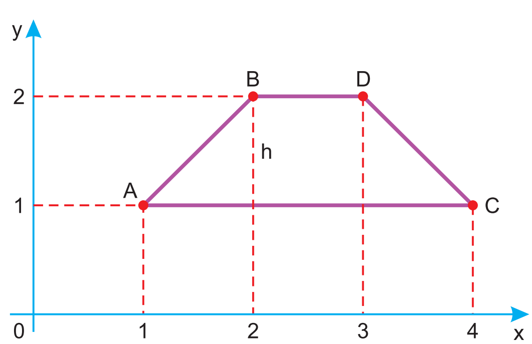
$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 - 4 = -6$

IV) A área do triângulo ABC é dada por

$S = \frac{|D|}{2} = \frac{|-6|}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Resposta: B

39) Representando o quadrilátero no sistema cartesiano, tem-se:

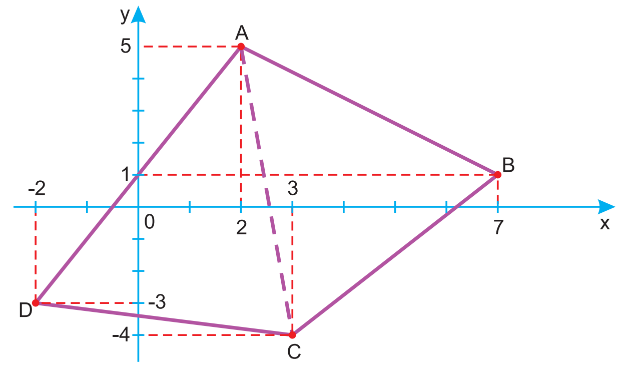


A área do quadrilátero é dada por

$\frac{(AC + BD) \, . \, h}{2} = \frac{(3 + 1) \, . \, 1}{2} = 2$

Resposta: 2u.a.

40) Representando o quadrilátero no sistema cartesiano, tem-se:



I) A área do triângulo ABC é $S_1 = \frac{\left|\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}\right|}{2} = \frac{41}{2} = 20{,}5$

II) A área do triângulo ACD é $S_2 = \frac{\left|\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}\right|}{2} = \frac{44}{2} = 22$

III) A área do quadrilátero ABCD é $S_1 + S_2 = 20{,}5 + 22 = 42{,}5$

Resposta: 42,5u.a.

41) Para os pontos $A(1; 3)$, $B(4; 7)$ e $C(6; 5)$, tem-se:

I) $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

II) $AC = \sqrt{(6-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

III) $BC = \sqrt{(6-4)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

IV) O perímetro do triângulo ABC é $5 + \sqrt{29} + 2\sqrt{2}$

V) A área do triângulo ABC é $\frac{\left|\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}\right|}{2} = \frac{14}{2} = 7$

Resposta: $\begin{cases} \text{perímetro} = 5 + 2\sqrt{2} + \sqrt{29} \\ \text{área} = 7 \end{cases}$

42) Se os pontos $A(7; 5)$, $B(3; -4)$ e $C(x; 6)$, com x inteiro, formam um triângulo de área 29, então:

$$\frac{\left|\begin{vmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ x & 6 & 1 \end{vmatrix}\right|}{2} = 29 = 8 \Leftrightarrow |-28 + 5x + 18 + 4x - 42 - 15| = 58$$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |9x - 67| = 58 \Leftrightarrow 9x - 67 = 58$ ou $9x - 67 = -58 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{125}{9}$ ou $x = 1 \Rightarrow x = 1$, pois x é inteiro

Resposta: x = 1

43) Se os pontos $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $B(-3; 4)$ e $C\left(t; -\frac{1}{2}\right)$ são colineares, então:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ t & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 + t + \frac{3}{2} - 4t + \frac{1}{4} + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 + 4t + 6 - 16t + 1 + 12 = 0 \Leftrightarrow -12t = -27 \Leftrightarrow t = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$$

Resposta: A

44) Para os pontos A(1; 2), B(3; 4) e C(4; 5), tem-se:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$ portanto, A, B e C estão alinhados e pertencem ao gráfico da função $f(x) = x + 1$, pois $f(1) = 2$, $f(3) = 4$ e $f(4) = 5$

Resposta: D

45) A distância real entre o ponto de partida C da joaninha e o de chegada A é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 2 m e 6 m.

Assim sendo, essa distância d, em metros, é:

$d = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Resposta: A

46)

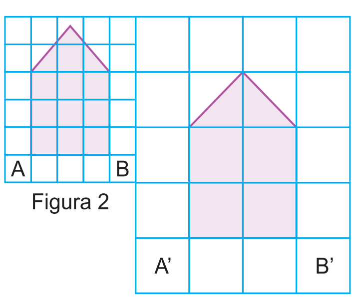


Figura 2

Figura 3

Sendo x a medida do lado da malha quadriculada da figura 2, a medida do lado da malha quadriculada da figura 3 é 2x.

Assim, $A'B' = 4x$, $AB = 3x$ e, portanto, o fator de ampliação da figura 2 para a figura 3 é:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$$

Resposta: C

47) $$A_{\Delta ABC} = \frac{\left\| \begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{matrix} \right\|}{2} = \frac{|-24|}{2} = 12 \text{ u.a.}$$

Resposta: 12 u. a.

48) Se A, B e C são vértices de um triângulo, então necessariamente:

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -6k + 6 + 6 - 3k \neq 0 \Leftrightarrow 9k \neq 12 \Leftrightarrow k \neq \frac{4}{3}$$

Resposta: C

49) Sendo S a área do triângulo de vértices A(6;8), B(2;2) e C(8;4), temos:

$$S = \frac{\left\| \begin{matrix} 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{matrix} \right\|}{2} = 14$$

Resposta: C

50) Os pontos A, B e C pertencem a uma mesma reta ⇔

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & -16 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

Resposta: D

51) Os pontos A, B e P estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ k & k + 12 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k = -5$$

Portanto: $3 \cdot k + 2 = -13$

Resposta: C