CADERNO 1 – SEMIEXTENSIVO E

FRENTE 1 – ÁLGEBRA

■ Módulo 1 – Equações do 1º Grau e do 2º Grau

1) $3x - [2 - (x - 1)] = 5x \Leftrightarrow 3x - [2 - x + 1] = 5x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x - 2 + x - 1 = 5x \Leftrightarrow 3x + x - 5x = 2 + 1 \Leftrightarrow -x = 3 \Leftrightarrow x = -3$
Resposta: $V = \{-3\}$

2) $3(x - 2) - x = 2x - 6 \Leftrightarrow 3x - 6 - x = 2x - 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x - x - 2x = 6 - 6 \Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow V = \mathbb{R}$
Resposta: $V = \mathbb{R}$

3) $2(x - 7) = x - (2 - x) \Leftrightarrow 2x - 14 = x - 2 + x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x - x - x = 14 - 2 \Leftrightarrow 0x = 12 \Leftrightarrow V = \varnothing$
Resposta: $V = \varnothing$

4) $$(x^2 + 1)(x - 1) \cdot (x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x \notin \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \text{ou} \\ x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}$$
Resposta: $V = \{1; -1\}$

5) $2x - [1 - (x - 2)] = 3 \Leftrightarrow 2x - [1 - x + 2] = 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x - 1 + x - 2 = 3 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$
Resposta: $V = \{2\}$

6) $$3x - \frac{x + 3}{2} = 5 - \frac{x - 2}{3} \Leftrightarrow 18x - 3(x + 3) = 30 - 2(x - 2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 18x - 3x - 9 = 30 - 2x + 4 \Leftrightarrow 17x = 43 \Leftrightarrow x = \frac{43}{17}$$
Resposta: C

7) Sendo x, em reais, a quantia inicial, tem-se:
I) Após o 1º milagre, a pessoa ficou com 2x
II) Após a 1ª doação, a pessoa ficou com $2x - 20\,000$
III) Após o 2º milagre, a pessoa ficou com $2 \cdot (2x - 20\,000)$
IV) Após a 2ª doação, a pessoa ficou com
$2 \cdot (2x - 20\,000) - 20\,000$
V) $2 \cdot (2x - 20\,000) - 20\,000 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x - 40\,000 - 20\,000 = 0 \Leftrightarrow 4x = 60\,000 \Leftrightarrow x = 15\,000$
Resposta: R$ 15 000,00

8) Sendo x, em anos, a idade atual, tem-se:
$$x = \frac{x + 20}{2} - \frac{x - 5}{3} \Leftrightarrow 6x = 3 \cdot (x + 20) - 2 \cdot (x - 5) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6x = 3x + 60 - 2x + 10 \Leftrightarrow 5x = 70 \Leftrightarrow x = 14$$
Resposta: B

9) Na equação $6x^2 - x - 1 = 0$, tem-se $a = 6$, $b = -1$ e $c = -1$, então:
I) $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25$
II) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$
Resposta: $V = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

10) Na equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, tem-se $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$, então:
I) $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$
II) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3$$
Resposta: $V = \{2; 3\}$

11) Na equação $x^2 + 4x + 3 = 0$, tem-se $a = 1$, $b = 4$ e $c = 3$, então:
I) $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$
II) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = -1$$
Resposta: $V = \{-3; -1\}$

12) Na equação $6x^2 - 13x + 6 = 0$, tem-se $a = 6$, $b = -13$ e $c = 6$, então:
I) $\Delta = b^2 - 4ac = 169 - 144 = 25$
II) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13 \pm 5}{12} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$
Resposta: $V = \left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}$

13) Na equação $4x^2 - 4x + 1 = 0$, tem-se $a = 4$, $b = -4$ e $c = 1$, então:
I) $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$
II) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
Resposta: $V = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

14) Na equação $x^2 - 2x + 5 = 0$, tem-se $a = 1$, $b = -2$ e $c = 5$, então:
I) $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16$
II) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2a} \notin \mathbb{R}$$
Resposta: $V = \varnothing$

15) $3x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow 3x \cdot (x + 4) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -4$
Resposta: $V = \{-4; 0\}$

16) $x^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 49 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{49} \Leftrightarrow x = \pm 7$

$V = \{-7; 7\}$

17) $\dfrac{x+2}{2} + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow (x+2) \,.\, (x-2) + 2 \,.\, 2 = -1 \,.\, (x-2)$,

com $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 + 4 = -x + 2$, com $x \neq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$, com $x \neq 2 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 1$

Resposta: E

18) Sendo x, em anos, a idade atual do filho, tem-se:

I) A idade atual do pai, em anos, é $x + 36$

II) $x \,.\, (x + 36) = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 + 36x = 4x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x^2 + 36x = 0 \Leftrightarrow 3 \,.\, x \,.\, (-x + 12) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 12 \Rightarrow x = 12$, pois $x > 0$

III) A idade do pai é $x + 36 = 12 + 36 = 48$ e a idade do filho é $x = 12$

Resposta: B

19) Sendo $S = \dfrac{3k}{k-2}$ e $P = \dfrac{1}{k-2}$ a soma e o produto das raízes, respectivamente, devemos ter $\dfrac{3k}{k-2} = \dfrac{1}{k-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3k = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{3}$

Resposta: C

20) Sendo $V = \{a; b\}$ o conjunto verdade da equação $x^2 - 3k\,x + k^2 = 0$, então:

$$\begin{cases} a + b = 3k \\ a \,.\, b = k^2 \end{cases}$$

$a + b = 3k \Rightarrow (a + b)^2 = (3k)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 9k^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{a^2 + b^2}_{1{,}75} + 2 \,.\, \underbrace{ab}_{k^2} = 9k^2 \Leftrightarrow 1{,}75 + 2k^2 = 9k^2 \Leftrightarrow 7k^2 = 1{,}75 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7k^2 = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow k^2 = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

Resposta: 0,25

21) I) As raízes da equação $x^2 - px + q = 0$ são a e b, então, $a + b = p$ e $a \,.\, b = q$

II) Uma equação do 2º grau que tem raízes $\dfrac{1}{a}$ e $\dfrac{1}{b}$, tem soma das raízes

$S = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{b + a}{a \,.\, b} = \dfrac{p}{q}$ e produto das raízes

$P = \dfrac{1}{a} \,.\, \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a \,.\, b} = \dfrac{1}{q}$

III) A equação procurada pode ser obtida por

$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \dfrac{p}{q} \,.\, x + \dfrac{1}{q} = 0 \Leftrightarrow qx^2 - px + 1 = 0$

Resposta: A

22) I) Sendo m e n as raízes da equação $2x^2 + 7x + 1 = 0$, tem-se $m + n = \dfrac{-7}{2}$ e $m \,.\, n = \dfrac{1}{2}$

II) Uma equação do 2º grau que tem raízes 2m e 2n, tem soma das raízes $S = 2m + 2n = 2 \,.\, (m + n) = 2 \,.\, \left(\dfrac{-7}{2}\right) = -7$

e produto das raízes $P = 2m \,.\, 2n = 4 \,.\, m \,.\, n = 4 \,.\, \dfrac{1}{2} = 2$

III) A equação procurada pode ser obtida por

$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 7x + 2 = 0$

Resposta: $x^2 + 7x + 2 = 0$

23) Na equação $ax^2 + bx + c = 0$, se a e c têm sinais contrários, então:

I) $a \,.\, c < 0 \Leftrightarrow 4ac < 0 \Leftrightarrow -4ac > 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta > 0$, então, a equação tem duas raízes reais distintas.

II) O produto das raízes é $P = \dfrac{c}{a} < 0$, assim, as raízes têm sinais contrários.

Resposta: A

24) $\dfrac{3}{2(x+2)} = \dfrac{1}{2x-4} - \dfrac{2}{x^2-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2(x+2)} = \dfrac{1}{2(x-2)} - \dfrac{2}{(x+2).(x-2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x - 2) = x + 2 - 2 \,.\, 2$, com $x + 2 \neq 0$ e $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - 6 = x + 2 - 4$, com $x \neq -2$ e $x \neq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 4$, com $x \neq -2$ e $x \neq 2 \Leftrightarrow x = 2$, com $x \neq -2$ e $x \neq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ não existe $x \Rightarrow V = \varnothing$

Resposta: C

25) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \,.\, (x^2 + 1) = 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ ou } x^2 + 1 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ ou } x^2 = -1\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0\} = \{0\}$

Resposta: {0}

26) $(x + 1) \,.\, (x - 1) \,.\, (x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 1 = 0$ ou $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ ou $x^2 = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R} \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

Resposta: $V = \{-1; 1\}$

27) $(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 = 0$

Fazendo $x^2 + 1 = y$, temos:

$y^2 - 7y + 10 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = 5$

Assim:

$x^2 + 1 = 2$ ou $x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1$ ou $x^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$ ou $x = \pm 2$

Resposta: C

28) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x^4)^2 - 15x^4 - 16 = 0$

Fazendo $x^4 = y$, temos:

$y^2 + 15y - 16 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ ou $y = 16$

Assim:

$x^4 = -1$ ou $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{-1} \notin \mathbb{R}$ ou $x = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 2$

Resposta: $V = \{-2; 2\}$

29) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + \ \ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Resposta: V = {(2; 1)}

30) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 15y = 3 \\ -6x - \ 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 15y = 3 \\ 11y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

Resposta: V = {(– 2; 1)}

31) **Se x for o número de cédulas de R$ 5,00 e y for o número de cédulas de R$ 10,00, então:**

$\begin{cases} x + y = 40 \\ 5x + 10y = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 40 \\ x + 2y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -40 \\ x + 2y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow x - y = 10$

Resposta: C

32) **Sendo v o número de bolas vermelhas e b o número de bolas brancas, temos:**

$\begin{cases} v + b = 20 \\ b = \dfrac{v + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v + \dfrac{v + 1}{2} = 20 \\ v + b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2v + v + 1 = 40 \\ v + b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3v = 39 \\ v + b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 13 \\ b = 7 \end{cases}$

Resposta: 13 vermelhas e 7 brancas

33) **Sendo j e m as idades atuais, em anos, de João e Maria, respectivamente, temos:**

$\begin{cases} j - 5 = 2 \, . \, (m - 5) \\ j + 5 + m + 5 = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j - 5 = 2m - 10 \\ j + m = 55 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} j - 2m = -5 \\ j + m = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -j + 2m = 5 \\ j + m = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 60 \\ j + m = 55 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 20 \\ j = 35 \end{cases} \Rightarrow j - m = 35 - 20 = 15$

Resposta: 15 anos

34) **Sendo n o número de pessas do grupo inicial, temos:**

I) A parcela inicial seria $\dfrac{6300}{n}$

II) A parcela final foi $\dfrac{6300}{n - 2}$

Assim, devemos ter:

$\dfrac{6300}{n - 2} = \dfrac{6300}{n} + 360 \Leftrightarrow \dfrac{35}{n - 2} = \dfrac{35}{n} + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 35n = 35(n - 2) + 2n(n - 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 35n = 35n - 70 + 2n^2 - 4n \Leftrightarrow 2n^2 - 4n - 70 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 35 = 0 \Leftrightarrow n = -5$ ou $n = 7 \Rightarrow n = 7$, pois $n > 0$

Resposta: E

35) **Sendo x o número de recenseadores e y o número de residências da cidade, temos:**

$\begin{cases} 100 \, . \, x = y - 60 \\ 102 \, . \, x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100x = 102x - 60 \\ y = 102x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 60 \\ y = 102x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 3060 \end{cases}$

Resposta: 3060 residências

36) **Sejam x o número de processos do Dr. André e y o do Dr. Carlos, então:**

$\begin{cases} x + y = 78 \\ x + 2y = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -78 \\ x + 2y = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 46 \\ y = 32 \end{cases}$

Resposta: D

37) **Sendo m e h, respectivamente, o número de filhas e de filhos do casal, temos:**

$\begin{cases} m = h - 1 \\ h = 2 \, . \, (m - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - h = -1 \\ h = 2m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h - m = 1 \\ -h + 2m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} h - m = 1 \\ m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 4 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow h + m = 4 + 3 = 7$

Resposta: E

38) **Sendo a, b e c as idades, em anos, de André, Bento e Carlos, respectivamente, temos:**

$\begin{cases} a + b + c = 41 \\ b = a + 3 \\ c = a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + a + 3 + a - 4 = 41 \\ b = a + 3 \\ c = a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 42 \\ b = a + 3 \\ c = a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = 17 \\ c = 10 \end{cases}$

Resposta: André tem 14 anos, Bento tem 17 anos e Carlos tem 10 anos.

39) **Sendo a e c os "pesos", em gramas, da água que enche o copo e do copo vazio, respectivamente, temos:**

$\begin{cases} c + a = 385 \\ c + \dfrac{2}{3} a = 310 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + a = 385 \\ -c - \dfrac{2}{3} a = -310 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c + a = 385 \\ \dfrac{1}{3} a = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + a = 385 \\ a = 225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 160 \\ a = 225 \end{cases}$

a) O peso do copo vazio é 160g

b) O peso do copo com $\dfrac{3}{5}$ **de água é**

$c + \dfrac{3}{5} a = \left(160 + \dfrac{3}{5} \, . \, 225\right) g = (160 + 135) g = 295 g$

Respostas: a) 160g b) 295g

40) **Sejam $x > 0$ e $y > 0$, respectivamente, o número inicial de estudantes e o valor da parcela que cabe a cada um**

$\begin{cases} x \, . \, y = 3250 \\ (x + 3) \, . \, (y - 75) = 3250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3250}{x} \\ y = \dfrac{3250}{x + 3} + 75 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3250}{x} = \dfrac{3250}{x + 3} + 75 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 130 = 0 \Rightarrow x = 10$

Resposta: B

■ Módulo 2 – Inequações do 1º e do 2º Grau

1) I) Observamos que a função do 1º grau é estritamente decrescente, então $a < 0$.
II) A reta intercepta o eixo y no ponto $(0; b)$, com $b > 0$.
Resposta: A

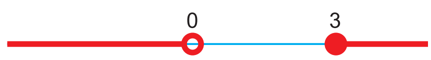
2) Dado $0 < a < b$, então $a^2 < b^2 \Rightarrow a^2 + a < b^2 + b \Rightarrow$

$\Rightarrow a\,.\,(a + 1) < b\,.\,(b + 1) \Rightarrow \dfrac{(a + 1)}{b} < \dfrac{(b + 1)}{a}$

Resposta: B

3) I) Se $x \notin \,]-1, 2]$, então:

II) Dado $x < 0$ ou $x \geqslant 3$, então:



Fazendo I ∩ II, temos:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

4) a) $2x - 10 < 4 \Leftrightarrow 2x < 14 \Leftrightarrow x < 7$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$
b) $-3x + 5 \geqslant 2 \Leftrightarrow -3x \geqslant -3 \Leftrightarrow 3x \leqslant 3 \Leftrightarrow x \leqslant 1$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$
c) $-(x - 2) \geqslant 2 - x \Leftrightarrow -x + 2 \geqslant 2 - x \Leftrightarrow 0x \geqslant 0$
$V = \mathbb{R}$
d) $x - 3 \geqslant 3 + x \Leftrightarrow 0x \geqslant 6$
$V = \varnothing$

5) $3n \geqslant \dfrac{1}{2}(n + 31) \Leftrightarrow 6n \geqslant n + 31 \Leftrightarrow 5n \geqslant 31 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{31}{5}$

O menor inteiro positivo é $n = 7$.
Resposta: C

6) $2x - 3 \leqslant 3 \Leftrightarrow 2x \leqslant 6 \Leftrightarrow x \leqslant 3$
Em $\mathbb{N}$ a soluções são 0, 1, 2 e 3, cujo produto é zero.
Resposta: E

7) $\dfrac{2x + 1}{5} - \dfrac{2 - x}{3} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{3\,.\,(2x + 1) - 5(2 - x)}{15} > \dfrac{15}{15} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x + 3 - 10 + 5x > 15 \Leftrightarrow 11x > 22 \Leftrightarrow x > 2$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

8) $x - \dfrac{x - 1}{2} > \dfrac{x - 3}{4} - \dfrac{x - 2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{12x - 6\,.\,(x - 1)}{12} > \dfrac{3\,.\,(x - 3) - 4\,.\,(x - 2)}{12} \Leftrightarrow$

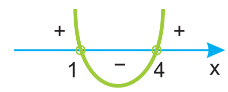
$\Leftrightarrow 12x - 6x + 6 > 3x - 9 - 4x + 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6x + 6 > -x - 1 \Leftrightarrow 7x > -7 \Leftrightarrow x > -1$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

9) $\dfrac{5x - 1}{4} - \dfrac{3x - 13}{10} > \dfrac{5x + 1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{15.(5x - 1) - 6.(3x - 13)}{60} > \dfrac{20.(5x + 1)}{60} \Leftrightarrow$

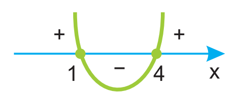
$\Leftrightarrow 75x - 15 - 18x + 78 > 100x + 20 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 57x + 63 > 100x + 20 \Leftrightarrow -43x > -43 \Leftrightarrow 43x < 43 \Leftrightarrow x < 1$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

10) $x^2 - 5x + 4 > 0$
As raízes são 1 e 4, logo o gráfico é do tipo



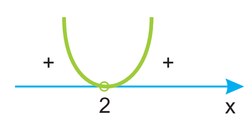
Então: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$

11) $x^2 - 5x + 4 \leqslant 0$
As raízes são 1 e 4, logo o gráfico é do tipo



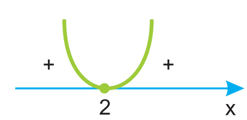
Então: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$.

12) $x^2 - 4x + 4 > 0$
A raiz é $x = 2$, logo o gráfico é do tipo



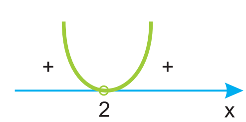
Então: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$ ou $V = \mathbb{R} - \{2\}$

13) $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$
A raiz é $x = 2$, logo o gráfico é do tipo



Então: $V = \mathbb{R}$

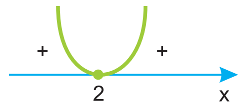
14) $x^2 - 4x + 4 < 0$
A raiz é $x = 2$, logo o gráfico é do tipo



Então: $V = \varnothing$

15) $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$

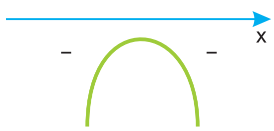
A raiz é $x = 2$, logo o gráfico é do tipo



Então: $V = \{2\}$

16) $-x^2 + 3x - 4 > 0$

Como $\Delta < 0$, o gráfico é do tipo



Logo: $V = \varnothing$.

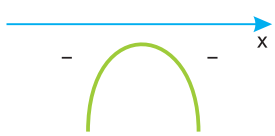
17) $-x^2 + 3x - 4 < 0$

Como $\Delta < 0$, o gráfico é do tipo

Logo: $V = \mathbb{R}$.

18) $-x^2 + 3x - 4 \leqslant 0$

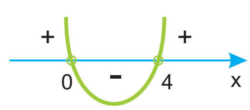
Como $\Delta < 0$, o gráfico é do tipo



Logo: $V = \mathbb{R}$.

19) $x^2 < 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x < 0$

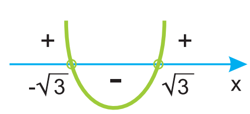
As raízes são 0 e 4, o gráfico é do tipo



Logo: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$.

20) $x^2 < 3 \Leftrightarrow x^2 - 3 < 0$

As raízes são $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$, o gráfico é do tipo

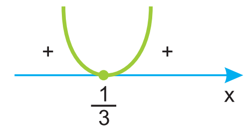


Logo: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$.

21) $9x^2 - 6x + 1 \leqslant 0$

I) $\Delta = 0 \Rightarrow x = \dfrac{6 \pm 0}{18} \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$ (raiz)

II) Gráfico

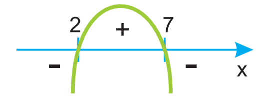


Então, $V = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

Resposta: C

22) $(x - 2) \cdot (7 - x) > 0$

As raízes são 2 e 7, o gráfico é do tipo



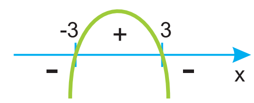
As soluções naturais são 3, 4, 5 e 6, cujo produto vale 360.

Resposta: E

23) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$

A condição de existência da função é $9 - x^2 > 0$

As raízes são -3 e 3 e o gráfico é do tipo



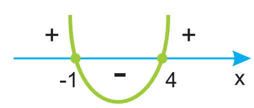
Então: $-3 < x < 3$.

$V =]-3, 3[$

Resposta: C

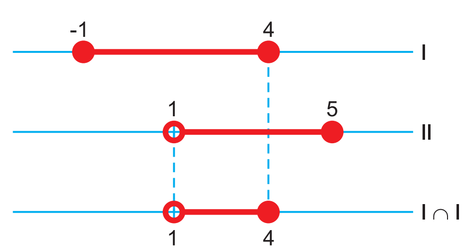
24) I) $x^2 - 3x - 4 \leqslant 0$

As raízes são -1 e 4 e o gráfico é do tipo



Então, $-1 \leqslant x \leqslant 4$

II) $-1 < x - 2 \leqslant 3 \Leftrightarrow 1 < x \leqslant 5$

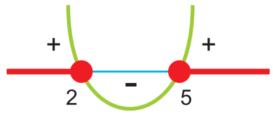


As soluções inteiras são 2, 3 e 4.

Resposta: E

25) I) $x^2 - 7x + 10 \geq 0$

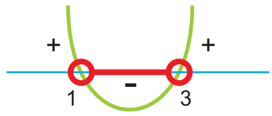
As raízes são 2 e 5 e o gráfico é do tipo



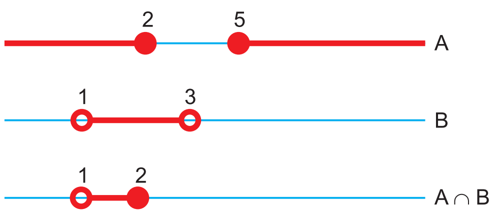
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 5\}$.

II) $x^2 - 4x + 3 < 0$

As raízes são 1 e 3 e o gráfico é do tipo



$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$.

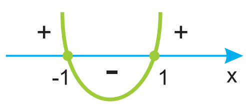


$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$

Resposta: A

26) I) $x^2 - 1 \geq 0$

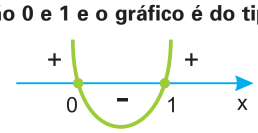
As raízes são – 1 e 1 e o gráfico é do tipo



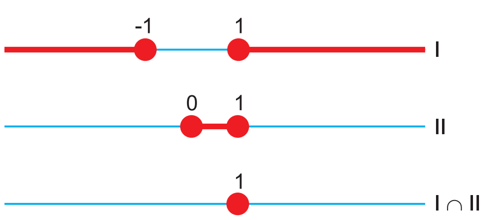
Logo, $x \leq -1$ ou $x \geq 1$.

II) $x^2 - x \leq 0$

As raízes são 0 e 1 e o gráfico é do tipo



Logo, $0 \leq x \leq 1$.



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1\} = \{1\}$

Resposta: A

27) I) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x-2}{5} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{5 \,.\, x - 3 \,.\, (x-2)}{15} < \dfrac{30}{15} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x - 3 \,.\, (x - 2) < 30 \Leftrightarrow 5x - 3x + 6 < 30 \Leftrightarrow 2x < 24 \Leftrightarrow x < 12$

II) $\dfrac{3 \,.\, (x-6)}{4} > 0 \Leftrightarrow 3 \,.\, (x - 6) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - 18 > 0 \Leftrightarrow 3x > 18 \Leftrightarrow x > 6$

De I ∩ II: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 6 < x < 12\}$

28) I) $3x + 2 < 7 - 2x \Rightarrow 5x < 5 \Rightarrow x < 1$

II) $48x < 3x + 10 \Rightarrow 45x < 10 \Rightarrow x < \dfrac{10}{45} \Rightarrow x < \dfrac{2}{9}$

III) $11 - 2(x - 3) > 1 - 3 \,.\, (x - 5) \Rightarrow 11 - 2x + 6 > 1 - 3x + 15 \Rightarrow$

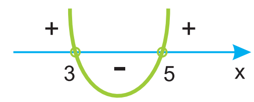
$\Rightarrow -2x + 17 > -3x + 16 \Rightarrow x > -1$

De I ∩ II ∩ III, temos: $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \dfrac{2}{9}\right\}$

Resposta: C

29) $(x - 3) \,.\, (x - 5) > 0$

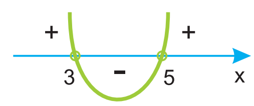
As raízes são 3 e 5 e o gráfico é do tipo



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ ou } x > 5\}$

30) $\dfrac{x-3}{x-5} > 0 \Leftrightarrow (x - 3) \,.\, (x - 5) > 0$, com $x \neq 5$

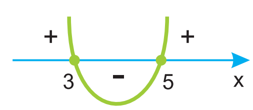
As raízes são 3 e 5 e o gráfico é do tipo



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ ou } x > 5\}$

31) $\dfrac{x-3}{x-5} \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3) \,.\, (x - 5) \geq 0$ e $x \neq 5$

As raízes são 3 e 5 e o gráfico é do tipo

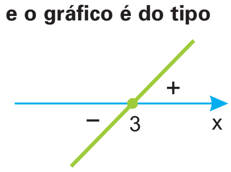


$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \text{ ou } x > 5\}$

32) $\dfrac{x-3}{3x - x^2} < 0$

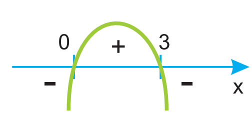
I) $f(x) = x - 3$

$x = 3$ é a raiz e o gráfico é do tipo



II) $g(x) = 3x - x^2$

As raízes são 0 e 3 e o gráfico é do tipo



III) Quadro de sinais

	0		3		
-		-		+	f(x)
-		+		-	g(x)
+		-		-	f(x) ÷ g(x)

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \ \text{ e } \ x \neq 3\}$

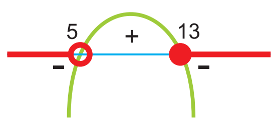
Resposta: E

33) $\dfrac{3}{x-5} \leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{x-5} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3 - 2 \,.\, (x-5)}{x-5} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3 - 2x + 10}{x-5} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x + 13}{x-5} \leq 0 \Leftrightarrow (-2x + 13) \,.\, (x-5) \leq 0 \ \text{ e } \ x \neq 5$

As raízes são $\dfrac{13}{2}$ e 5 e o gráfico é do tipo



$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5 \text{ ou } x \geq \dfrac{13}{2}\right\}$

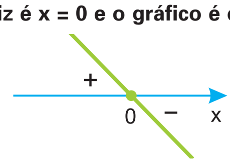
Resposta: E

34) $\dfrac{x}{x+3} - \dfrac{1}{x-1} > 1 \Leftrightarrow$

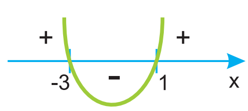
$\Leftrightarrow \dfrac{x \,.\, (x-1) - (x+3) - (x+3) \,.\, (x-1)}{(x+3) \,.\, (x-1)} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - x - x - 3 - (x^2 + 2x - 3)}{(x+3) \,.\, (x-1)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x}{(x+3) \,.\, (x-1)} > 0$

I) $f(x) = -4x$, a raiz é $x = 0$ e o gráfico é do tipo



II) $g(x) = (x+3) \,.\, (x-1)$, as raízes são -3 e 1 e o gráfico é do tipo



III) Quadro de sinais

	-3		0		1		
+		+		-		-	f(x)
+		-		-		+	g(x)
+		-		+		-	f(x) ÷ g(x)

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \ \text{ ou } \ 0 < x < 1\}$

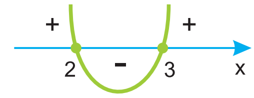
Resposta: B

35) $\dfrac{x^2 - 3x + 8}{x+1} < 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 8 - 2(x+1)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x+1} < 0$

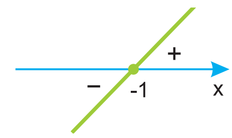
I) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

As raízes são 2 e 3 e o gráfico é do tipo



II) $g(x) = x + 1$

A raiz é $x = -1$ e o gráfico é do tipo



III) Quadro de sinais

	-1		2		3		
+		+		-		+	f(x)
-		+		+		+	g(x)
-		+		-		+	f(x) . g(x)

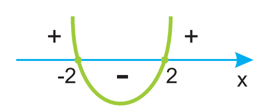
$V =]-\infty, -1[\cup]2, 3[$

Resposta: A

36) $(x^2 - 4) \,.\, (x^2 - 4x) \geq 0$

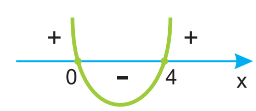
I) $f(x) = x^2 - 4$

As raízes são -2 e 2 e o gráfico é do tipo



II) $g(x) = x^2 - 4x$

As raízes são 0 e 4 e o gráfico é do tipo



III) Quadro de sinais

	-2		0		2		4		
+		-		-		+		+	f(x)
+		+		-		-		+	g(x)
+		-		+		-		+	f(x) . g(x)

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } 0 \leq x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4\}$

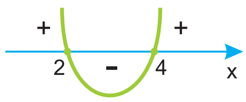
Resposta: D

37) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 1}}$

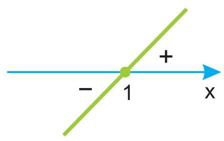
I) O domínio é a condição de existência da função.

II) $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 1} \geqslant 0$ com $x \neq 1$.

III) $f(x) = x^2 - 6x + 8$, as raízes são 2 e 4 e o gráfico é do tipo



IV) $g(x) = x - 1$, a raiz é $x = 1$ e o gráfico é do tipo



V) Quadro de sinais

	1	2	4		
+	+	-	+	$f(x)$
-	+	+	+	$g(x)$
-	+	-	+	$f(x) \div g(x)$

1 2 4

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 2 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

Resposta: C

38) $f(x) = -x^2 + 12x + 20$

$x_v = \dfrac{-b}{4a} = \dfrac{-12}{2 \cdot (-1)} = 6$

$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ ou $y_v = -6^2 + 12 \cdot 6 + 20 = 56$

Como $a < 0$, a parábola tem concavidade para baixo e, portanto, para $x_v = 6$ o máximo é $y_v = 56$.

Resposta: C

39) $L(x) = 100 \cdot (10 - x) \cdot (x - 4)$

As raízes são 4 e 10, portanto, $x_v = \dfrac{4 + 10}{2} = 7$.

Como $a < 0$, a parábola tem concavidade para baixo e, portanto, o lucro é máximo quando $x_v = 7$.

Resposta: A

40) $f(x) = -2x^2 + 4x + 12$

Como $a < 0$, a parábola tem concavidade para baixo e, portanto, o valor máximo é

$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-(4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 12)}{4 \cdot (-2)} = 14.$

Resposta: E

41) $y = x - 0{,}05 \cdot x^2$

Como $a < 0$, a parábola tem concavidade para baixo e, portanto, a altura máxima atingida pelo golfinho é

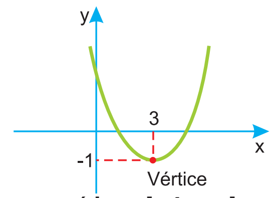
$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-(1 - 4 \cdot (-0{,}05) \cdot 0)}{4 \cdot (-0{,}05)} = \dfrac{-1}{-0{,}20} = 5$

Resposta: A

42) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

I) $x_v = -\dfrac{b}{2a} = 3$ e $y_v = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1$

II) O gráfico é do tipo



O conjunto imagem é $Im = [-1, +\infty[$

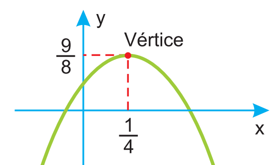
Resposta: E

43) $y = -2x^2 + x + 1$

I) $x_v = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{4}$ e

$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-(1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1)}{4 \cdot (-2)} = \dfrac{9}{8}$

II) O gráfico é do tipo



O conjunto imagem é $Im = \left]-\infty, \dfrac{9}{8}\right]$

Resposta: A

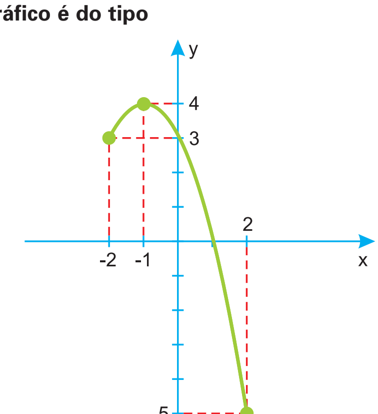
44) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

I) Como o domínio é $[-2, 2]$, temos:

$$\begin{cases} f(-2) = -(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = 3 \\ f(2) = -2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = -5 \end{cases}$$

II) $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -1$ e $y_v = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 4$

III) O gráfico é do tipo



O conjunto imagem é $Im = [-5,4]$

Resposta: B

45) lucro = receita – custo $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ lucro = $(-x^2 + 10{,}5x) - (x^2 + 0{,}5x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ lucro = $-2x^2 + 10x - 1$

Como $a < 0$, a parábola tem concavidade para baixo e o lucro máximo é $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-(10^2 - 4 \,.\, (-2) \,.\, (-1))}{4 \,.\, (-2)} = 11{,}5$

Resposta: B

46) I) De acordo com o gráfico, temos que – 1 e 3 são as raízes reais da função quadrática.

II) Forma fatorada: $f(x) = a \,.\, (x - r_1) \,.\, (x - r_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = a \,.\, (x + 1) \,.\, (x - 3)$

III) No gráfico, temos $f(1) = -2$ e, portanto,

$f(1) = a \,.\, (1 + 1) \,.\, (1 - 3) \Rightarrow -4a = -2 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

De II e III, temos: $f(x) = \dfrac{1}{2} \,.\, (x + 1) \,.\, (x - 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2} \,.\, (x^2 - 2x - 3) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{3}{2}$

Resposta: B

47) $f(x) = (m - 1)x^2 + 2mx + 3m$

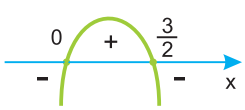
I) Uma função do 2º grau é estritamente positiva quando $a > 0$ e $\Delta < 0$.

II) $a > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

III) $\Delta < 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4 \,.\, (m - 1) \,.\, (3m) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 12m^2 + 12m < 0 \Leftrightarrow -8m^2 + 12m < 0$

As raízes são 0 e $\dfrac{3}{2}$ e o gráfico é do tipo



então, $m < 0$ ou $m > \dfrac{3}{2}$.

De II e III, temos $m > \dfrac{3}{2}$.

Resposta: C

■ Módulo 3 – Logaritmos – Definição e Existência

1) a) $\log_2 8 = \alpha \Leftrightarrow 2^\alpha = 8 \Leftrightarrow 2^\alpha = 2^3 \Leftrightarrow \alpha = 3$

b) $\log_3 81 = \alpha \Leftrightarrow 3^\alpha = 81 \Leftrightarrow 3^\alpha = 3^4 \Leftrightarrow \alpha = 4$

c) $\log_4 64 = \alpha \Leftrightarrow 4^\alpha = 64 \Leftrightarrow (2^2)^\alpha = 2^6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2\alpha} = 2^6 \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$

d) $\log_8 32 = \alpha \Leftrightarrow 8^\alpha = 32 \Leftrightarrow (2^3)^\alpha = 2^5 \Leftrightarrow 2^{3\alpha} = 2^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{5}{3}$

e) $\log_9 27 = \alpha \Leftrightarrow 9^\alpha = 27 \Leftrightarrow (3^2)^\alpha = 3^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{2\alpha} = 3^3 \Leftrightarrow 2\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{3}{2}$

f) $\log_8(4\sqrt{2}) = \alpha \Leftrightarrow 8^\alpha = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^3)^\alpha = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{3\alpha} = 2^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow 3\alpha = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{5}{6}$

g) $\log_{27}(9\sqrt{3}) = \alpha \Leftrightarrow 27^\alpha = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow (3^3)^\alpha = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{3\alpha} = 3^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow 3\alpha = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{5}{6}$

2) $\log_{\frac{1}{4}} 32 = \alpha \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{4}\right)^\alpha = 32 \Leftrightarrow 4^{-\alpha} = 2^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^2)^{-\alpha} = 2^5 \Leftrightarrow 2^{-2\alpha} = 2^5 \Leftrightarrow -2\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{5}{2}$

Resposta: E

3) $\log_6 7776 = \alpha \Leftrightarrow 6^\alpha = 7776 \Leftrightarrow 6^\alpha = 2^5 \cdot 3^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6^\alpha = (2 \cdot 3)^5 \Leftrightarrow 6^\alpha = 6^5 \Leftrightarrow \alpha = 5$

Resposta: B

4) Sendo b a base procurada, onde $b > 0$ e $b \neq 1$, temos:

$\log_b\left(\dfrac{81}{16}\right) = -4 \Leftrightarrow b^{-4} = \dfrac{81}{16} \Leftrightarrow b^{-4} = \dfrac{3^4}{2^4} \Leftrightarrow b^{-4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^{-4} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} \Leftrightarrow b = \dfrac{2}{3}$

5) $[\log_5(25 \log_2 32)]^3 = [\log_5(5^2 \cdot \log_2 2^5)]^3 =$

$= [\log_5(5^2 \cdot 5)]^3 = [\log_5 5^3]^3 = 3^3 = 27$

6) I) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

II) $\log_4 32 = x \Leftrightarrow 4^x = 32 \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^5 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$

III) $\log_2 16 - \log_4 32 = 4 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{8 - 5}{2} = \dfrac{3}{2}$

Resposta: B

7) I) $\log_{\frac{1}{3}}(3\sqrt{3}) = x \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{-x} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

II) $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = y \Leftrightarrow 2^y = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^y = 2^{-2} \Leftrightarrow y = -2$

III) $\log_5 5 = 1$

IV) $M = \log_{\frac{1}{3}}(3\sqrt{3}) - \log_2\left(\frac{1}{4}\right) - \log_5 5 = -\frac{3}{2} + 2 - 1 =$

$= -\frac{3}{2} + 1 = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$

8) I) $\log_8 2^x = y + 1 \Leftrightarrow 2^x = 8^{y+1} \Leftrightarrow 2^x = (2^3)^{y+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x = 2^{3y+3} \Leftrightarrow x = 3y + 3 \Leftrightarrow x - 3y = 3$

II) $\log_3 9^y = x - 9 \Leftrightarrow 9^y = 3^{x-9} \Leftrightarrow (3^2)^y = 3^{x-9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{2y} = 3^{x-9} \Leftrightarrow 2y = x - 9 \Leftrightarrow -x + 2y = -9$

III) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ -x + 2y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 3 \\ -y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow x - y = 21 - 6 = 15$

Resposta: E

9) Se a e b são as raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$, então $a \cdot b = 10$

Assim, $\log\left(\frac{1}{ab}\right) = \log\frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1$

Resposta: B

10) Fazendo $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, temos:

$a^{\log_a b} = a^x = b$

Resposta: A

11) $\frac{2}{3} \cdot \log_b 27 + 2 \cdot \log_b 2 - \log_b 3 = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_b (27)^{\frac{2}{3}} + \log_b 2^2 - \log_b 3 = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_b (3^3)^{\frac{2}{3}} + \log_b 4 - \log_b 3 = -1 \Leftrightarrow \log_b 3^2 + \log_b 4 - \log_b 3 = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_b (3^2 \cdot 4) - \log_b 3 = -1 \Leftrightarrow \log_b\left(\frac{3^2 \cdot 4}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_b 12 = -1 \Leftrightarrow b^{-1} = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{b} = 12 \Leftrightarrow b = \frac{1}{12}$

Resposta: B

12) $\log_4(24{,}96) - \log_4(3{,}12) = \log\left(\frac{24{,}96}{3{,}12}\right) = \log_4 8$

Fazendo $\log_4 8 = x \Leftrightarrow 4^x = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^2)^x = 2^3 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Portanto, $\log_4(24{,}96) - \log_4(3{,}12) = \frac{3}{2}$

Resposta: B

13) $\log_3 b - \log_3 a = 4 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{b}{a}\right) = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right) = 3^4 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right) = 81$

Resposta: C

14) Se $\log_{10} 123 = 2{,}09$, então:

$\log_{10} 1{,}23 = \log_{10}\left(\frac{123}{100}\right) = \log_{10} 123 - \log_{10} 100 = 2{,}09 - 2 = 0{,}09$

Resposta: B

15) $\log m = 2 - \log 4 \Leftrightarrow \log m + \log 4 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log (m \cdot 4) = 2 \Leftrightarrow 4m = 10^2 \Leftrightarrow m = \frac{100}{4} \Leftrightarrow m = 25$

Resposta: D

16) $\log x = \log b + 2 \log c - \frac{1}{3} \log a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log x = \log b + \log c^2 - \log a^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log x = \log (b \cdot c^2) - \log \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log x = \log\left(\frac{bc^2}{\sqrt[3]{a}}\right) \Leftrightarrow x = \frac{bc^2}{\sqrt[3]{a}}$

Resposta: D

17) $\log \sqrt{x} = \log y^2 + \frac{1}{2} \cdot \log y + \log y^{-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log \sqrt{x} = \log y^2 + \log y^{\frac{1}{2}} + \log y^{-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log \sqrt{x} = \log (y^2 \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-3}) \Leftrightarrow \log \sqrt{x} = \log y^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = y^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow x = y^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$

Resposta: B

18) Se $\log_c a = 3$, $\log_c b = 4$ e $y = \frac{a^3 \cdot \sqrt{b \cdot c^2}}{b \cdot c^4}$, então:

$\log_c y = \log_c\left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{b \cdot c^2}}{b \cdot c^4}\right) = \log_c(a^3\sqrt{b \cdot c^2} \cdot b^{-1} \cdot c^{-4}) =$

$= \log_c(a^3 \cdot \sqrt{b} \cdot c \cdot b^{-1} \cdot c^{-4}) = \log_c(a^3 \cdot b^{-\frac{1}{2}} \cdot c^{-3}) =$

$= \log_c a^3 + \log_c b^{-\frac{1}{2}} + \log_c c^{-3} =$

$= 3 \cdot \log_c a - \frac{1}{2} \cdot \log_c b - 3 \cdot \log_c c =$

$= 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 9 - 2 - 3 = 4$

Resposta: C

19) Se $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, então:

$\log 72 = \log (2^3 \cdot 3^2) = \log 2^3 + \log 3^2 =$

$= 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 = 3x + 2y$

Resposta: B

20) $\frac{1}{4} \cdot \log m^5 - \frac{3}{4} \cdot \log m = \log \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot \log m - \frac{3}{4} \cdot \log m = \log \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right) \cdot \log m = \log 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \log m = \frac{1}{2} \cdot \log 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log m = \log 3 \Leftrightarrow m = 3$

Resposta: B

21) I) $2 \cdot \log_2 (1 + \sqrt{2}x) - \log_2 (\sqrt{2}x) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 (1 + \sqrt{2}x)^2 - \log_2 (\sqrt{2}x) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 \left[\frac{(1 + \sqrt{2}x)^2}{\sqrt{2}x}\right] = 3 \Leftrightarrow \frac{(1 + \sqrt{2}x)^2}{\sqrt{2}x} = 2^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 + \sqrt{2}x)^2 = 8\sqrt{2}x \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{2}x + 2x^2 = 8\sqrt{2}x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6\sqrt{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-6\sqrt{2}) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 2} = \frac{6\sqrt{2} \pm 8}{4}$

Como a é o menor valor de x, temos que: $a = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2}$

II) $\log_2\left(\frac{2a + 4}{3}\right) = \log_2 \left[\frac{2 \cdot \left(\frac{3\sqrt{2} - 4}{2}\right) + 4}{3}\right] =$

$= \log_2\left[\frac{3\sqrt{2} - 4 + 4}{3}\right] = \log_2\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 = \frac{1}{2}$

Resposta: B

22) Se $\log_2 3 = a$ e $\log_3 5 = b$, então:

$\log_3 2 + \log_3 25 \cdot \log_5 2 = \log_3 2 + \log_3 5^2 \cdot \log_5 2 =$

$= \log_3 2 + 2 \cdot \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 2}{\log_3 5} =$

$= \log_3 2 + 2 \cdot \log_3 2 = 3 \cdot \log_3 2 = 3 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = 3 \cdot \frac{1}{a} = \frac{3}{a}$

Resposta: D

23) $x = \log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2} = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 \sqrt[3]{2}}{\log_3 25} =$

$= \log_3 5 \cdot \frac{3}{\log_3 2^2} \cdot \frac{\log_3 2^{\frac{1}{3}}}{\log_3 5^2} = \log_3 5 \cdot \frac{3}{2 \cdot \log_3 2} \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \log_3 2}{2 \cdot \log_3 5} =$

$= 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{4}$

Resposta: C

24) $x \cdot \left(\log_2(7^x) + \log_2\left(\frac{7}{3}\right)\right) + \log_2(21^x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \cdot [x \,.\, \log_2 7 + \log_2 7 - \log_2 3] + x \cdot \log_2 21 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \cdot [x \,.\, \log_2 7 + \log_2 7 - \log_2 3 + \log_2(3 \cdot 7)] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \cdot (x \cdot \log_2 7 + \log_2 7 - \log_2 3 + \log_2 3 + \log_2 7) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \cdot (x \,.\, \log_2 7 + 2 \cdot \log_2 7) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \log_2 7 \cdot (x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$

Resposta: D

25) $\log_{a^2}\sqrt{5} + \log_{a^3}\sqrt{5} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{\log_a\sqrt{5}}{\log_a a^2} + \frac{\log_a\sqrt{5}}{\log_a a^3} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\log_a\sqrt{5}}{2 \cdot \log_a a} + \frac{\log_a\sqrt{5}}{3 \cdot \log_a a} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{\log_a\sqrt{5}}{2} + \frac{\log_a\sqrt{5}}{3} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{6 \log_a\sqrt{5} + 4 \log_a\sqrt{5}}{12} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow 10 \cdot \log_a\sqrt{5} = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_a\sqrt{5} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow a = 5$

Resposta: D

26) I) $\log_{10} 3 = \frac{12}{25} \Leftrightarrow \log_3 10 = \frac{25}{12}$

II) Se $a^2 + b^2 = 28ab$, então:

$\log_3\left(\frac{(a + b)^2}{ab}\right) = \log_3\left(\frac{a^2 + 2ab + b^2}{ab}\right) = \log_3\left(\frac{28ab + 2ab}{ab}\right) =$

$= \log_3\left(\frac{30ab}{ab}\right) = \log_3 30 = \log_3(3 \cdot 10) = \log_3 3 + \log_3 10 =$

$= 1 + \frac{25}{12} = \frac{12 + 25}{12} = \frac{37}{12}$

Resposta: A

27) $\begin{cases} x \cdot y = 3 \\ \log_3 x + \log_9 y = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 3 \\ \log_3 x + \frac{\log_3 y}{\log_3 9} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 3 \\ 2 \cdot \log_3 x + \log_3 y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 3 \\ \log_3 x^2 + \log_3 y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 3 \\ \log_3(x^2 \cdot y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 3 \\ x^2 \cdot y = 3^3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 3 \\ x \cdot x \cdot y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 3 \\ x \cdot 3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = 9 + \frac{1}{3} = \frac{27 + 1}{3} = \frac{28}{3}$

Resposta: C

28) I) Observe que: $1 + \frac{1}{24} = \frac{25}{24}$

II) população atual: P

população após 1 ano: $P \cdot \frac{25}{24}$

população após 2 anos: $P \cdot \left(\frac{25}{24}\right)^2$

$\vdots$

população após t anos: $P \cdot \left(\frac{25}{24}\right)^t$

III) Devemos ter: $P \cdot \left(\frac{25}{24}\right)^t = 2 \cdot P \Leftrightarrow \left(\frac{25}{24}\right)^t = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log \left(\frac{25}{24}\right)^t = \log 2 \Leftrightarrow t \cdot \log \left(\frac{25}{24}\right) = \log 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t \cdot \log\left(\frac{100}{96}\right) = \log 2 \Leftrightarrow t \cdot (\log 100 - \log 96) = \log 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t \cdot [2 - \log(2^5 \cdot 3)] = \log 2 \Leftrightarrow t \cdot (2 - 5 \cdot \log 2 - \log 3) = \log 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t \cdot (2 - 5 \cdot 0{,}30 - 0{,}48) = 0{,}3 \Leftrightarrow t \cdot (0{,}02) = 0{,}3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \frac{0{,}3}{0{,}02} = 15$

Resposta: t = 15 anos

29) Para $\log_{10}2 = m$ e $\log_{10}3 = n$, temos:

$$\log_5 6 = \frac{\log_{10}6}{\log_{10}5} = \frac{\log_{10}(2 \cdot 3)}{\log_{10}\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{\log_{10}2 + \log_{10}3}{\log_{10}10 - \log_{10}2} = \frac{m + n}{1 - m}$$

Resposta: D

30) I) $\log_5 81 = k \Leftrightarrow \log_5 3^4 = k \Leftrightarrow 4 \cdot \log_5 3 = k \Leftrightarrow \log_5 3 = \frac{k}{4}$

II) $\log_3\sqrt{15} = \frac{\log_5\sqrt{15}}{\log_5 3} = \frac{\log_5 15^{\frac{1}{2}}}{\log_5 3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \log_5 15}{\frac{k}{4}} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{k} \cdot \log_5 15 = \frac{2}{k} \cdot \log_5(3 \cdot 5) = \frac{2}{k} \cdot [\log_5 3 + \log_5 5]$

$= \frac{2}{k} \cdot \left[\frac{k}{4} + 1\right] = \frac{2}{k} \cdot \left[\frac{k+4}{4}\right] = \frac{k+4}{2k}$

Resposta: D

31) I) $5^p = 2 \Leftrightarrow \log_5 2 = p$

$\log_2 100 = \frac{\log_5 100}{\log_5 2} = \frac{\log_5 10^2}{p} = \frac{2 \cdot \log_5 10}{p} =$

$= \frac{2 \cdot \log_5(2 \cdot 5)}{p} = \frac{2 \cdot [\log_5 2 + \log_5 5]}{p} = \frac{2\,[p + 1]}{p} = \frac{2p + 2}{p}$

Resposta: E

■ Módulo 4 – Equações e Inequações Logarítmicas e Exponenciais

1) $\log x + \log (x - 5) = \log 36 \Leftrightarrow \log [x \cdot (x - 5)] = \log 36 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \cdot (x - 5) = 36 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 9$
Pela condição de existência dos logaritmos, devemos ter $x > 5$, então a única solução é $x = 9$.
Resposta: D

2) $\log_2(x + 2) + \log_2(x - 2) = x^{\log_x 5}$
Pela condição de existência dos logaritmos, devemos ter:
a) $(x + 2) > 0 \Leftrightarrow x > -2$
b) $(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x > 2$
c) $x > 0$ e $x \neq 1$
Assim, (a) ∩ (b) ∩ (c) ⇒ $x > 2$
Desta forma, $\log_2[(x + 2) \cdot (x - 2)] = x^{\log_x 5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 4) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6$
Pela condição de existência dos logaritmos, temos S = {6}
Resposta: E

3) I) Condições de existência:

$$\begin{cases} 5x + 1 > 0 \\ 1 - 5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{5} \\ x < \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$$

II) $\log\sqrt{5x + 1} - \log(1 - 5x) = 0 \Leftrightarrow \log\left(\frac{\sqrt{5x+1}}{1 - 5x}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5x+1}}{1 - 5x} = 10^0 \Leftrightarrow \sqrt{5x + 1} = 1 - 5x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sqrt{5x + 1})^2 = (1 - 5x)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x + 1 = 1 - 10x + 5x^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 15x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$.

III) $\begin{cases} -\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5} \\ x = 0 \text{ ou } x = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 0$

Resposta: C

4) $2 \log_5 x = \log_5 x + \log_5 8 \Leftrightarrow \log_5 x^2 = \log_5(x \cdot 8) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = 8x \Leftrightarrow x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 8$
Pela condição de existência dos logaritmos, $x > 0$.
Assim, S = {8}
Resposta: B

5) a) I) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \log_3(9x^2) = 1 \Leftrightarrow 9x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{9} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$

Para $x > 0$, temos:

$x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V_f = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

II) $g(x) = -3 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{1}{x}\right) = -3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3^{-3} \Leftrightarrow x = 3^3 = 27 \Rightarrow V_g = \{27\}$$

b) $1 + f(x) + g(x) = 1 + \log_3(9x^2) + \log_3\left(\frac{1}{x}\right) =$

$= 1 + \log_3 9 + \log_3 x^2 + \log_3 x^{-1} =$

$= 1 + 2 + 2 \,.\, \log_3 x - 1 \,.\, \log_3 x = 3 + \log_3 x$

6) $\begin{cases} 2 \,.\, \log_y x + (\log_x y)^{-1} = 6 \\ x - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \,.\, \log_y x + \dfrac{1}{\log_x y} = 6 \\ x - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \,.\, \log_y x + \log_y x = 6 \\ x - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \,.\, \log_y x = 6 \\ x - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_y x = 2 \\ x - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y^2 - y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y = 4 \text{ ou } y = -3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 4 \end{cases}$, pois $x > 1$ e $y > 1$

Assim, $x + y = 16 + 4 = 20$

Resposta: C

7) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x - \log_2 y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ 2 \,.\, \log_2 x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \log_2 y = 5 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 y = 3 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow V = \{(4; 8)\}$

8) $\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{3})^x}{3} = 3^y \\ \dfrac{\log(x-1) - \log y}{2} = \log \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^y \,.\, 3 \\ \log(x-1) - \log y = 2 \,.\, \log\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\frac{x}{2}} = 3^{y+1} \\ \log\left(\dfrac{x-1}{y}\right) = \log(\sqrt{3})^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = y + 1 \\ \dfrac{x-1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 2 \\ x = 3y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 2 \\ 3y + 1 = 2y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x + y = 5$

Resposta: A

9) $\log_2(x-2) - \log_4 x = 1 \Leftrightarrow \log_2(x-2) - \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(x-2) - \dfrac{\log_2 x}{2} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \log_2(x-2) - \log_2 x = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(x-2)^2 - \log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{(x-2)^2}{x}\right) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^2}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{48}}{2} = \dfrac{8 \pm 4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 4 + 2\sqrt{3}$, pois $x > 2$

Resposta: D

10) Sendo $\log 1{,}5 = 0{,}18$, temos:

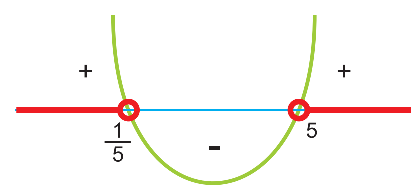
$\log 2^x - \log 3^x = 9 \Leftrightarrow \log\left(\dfrac{2^x}{3^x}\right) = 9 \Leftrightarrow \log\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \cdot \log\left(\dfrac{2}{3}\right) = 9 \Leftrightarrow x \cdot \log\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} = 9 \Leftrightarrow -x \cdot \log\left(\dfrac{3}{2}\right) = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x \,.\, \log 1{,}5 = 9 \Leftrightarrow -x \,.\, 0{,}18 = 9 \Leftrightarrow x = \dfrac{-9}{0{,}18} \Leftrightarrow x = -50$

Resposta: C

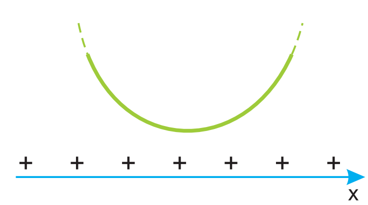
11) $5x^2 - 26x + 5 > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{5}$ ou $x > 5$, pois o gráfico de $g(x) = 5x^2 - 26x + 5$ é do tipo:



Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < \dfrac{1}{5} \text{ ou } x > 5\right\}$

Resposta: C

12) $x^2 + x + 7 < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pois o gráfico de $g(x) = x^2 + x + 7$ é do tipo:



Assim, temos: $D(f) = \mathbb{R}$

Resposta: E

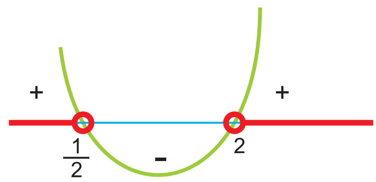
13) **O campo de definição de uma função é o conjunto para o qual a função está definida. Em outras palavras, o campo de definição é o mesmo que o domínio da função.**

Desta forma, pela condição de existência dos logaritmos, temos:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 2 > 0 \text{ e } x + 1 > 0 \text{ e } x + 1 \neq 1\}$

Assim sendo:

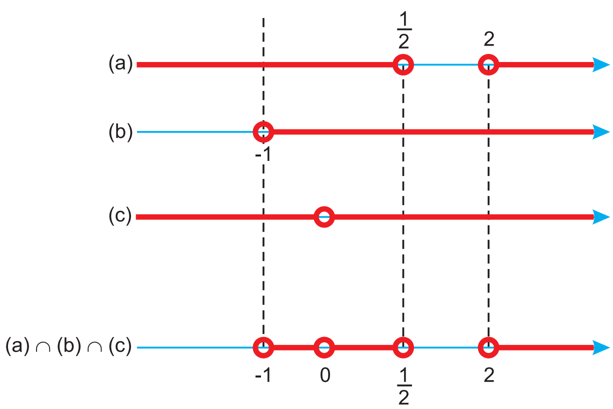
a) $2x^2 - 5x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$ **ou** $x > 2$**, pois o gráfico de** $g(x) = 2x^2 - 5x + 2$ **é do tipo:**



b) $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

c) $x + 1 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$

De (a) ∩ (b) ∩ (c), temos:



Portanto, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 < x < 0 \text{ ou } 0 < x < \dfrac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$

Resposta: D

14) **Se os pontos (1, 2) e (5, 10) pertencem ao gráfico de** $f(x) = a \cdot b^{\log_2 x}$**, temos:**

I) $f(1) = 2 \Rightarrow a \cdot b^{\log_2 1} = 2 \Rightarrow a \cdot b^0 = 2 \Rightarrow a = 2$

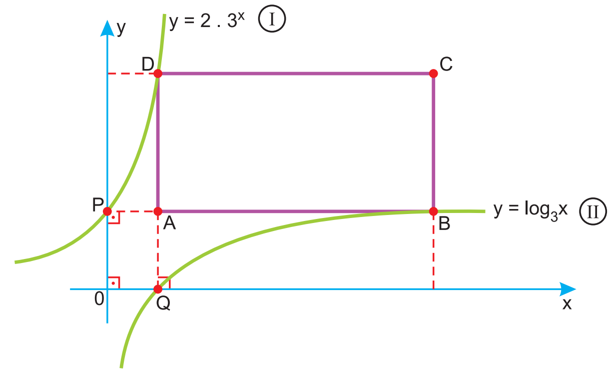
II) $f(5) = 10 \Rightarrow 2 \cdot b^{\log_2 5} = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^{\log_2 5} = 5 \Rightarrow \log_b 5 = \log_2 5 \Leftrightarrow b = 2$

Logo, a + b = 2 + 2 = 4

Resposta: B

15)



Fazendo x = 0 em (I), temos:

$y = 2 \cdot 3^0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow OP = 2$

Fazendo y = 0 em (II), temos:

$\log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 3^0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow OQ = 1$

Desta forma, A(1, 2)

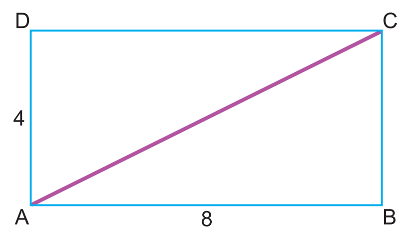
Fazendo x = 1 em (I), temos:

$y = 2 \cdot 3^1 = 6 \Rightarrow D(1, 6)$

Fazendo y = 2 em (II), temos:

$\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 \Leftrightarrow x = 9 \Rightarrow B(9, 2)$ **e** $C(9, 6)$

Portanto, temos a seguinte figura:



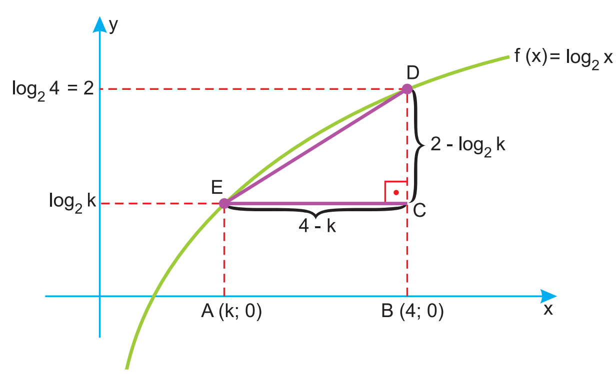
$(AC)^2 = 4^2 + 8^2$

$AC = \sqrt{16 + 64}$

$AC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

Resposta: D

16)



$A_{CDE} = 20\%$ **de** $A_{ABDE} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(4 - k) \cdot (2 - \log_2 k)}{2} = \dfrac{20}{100} \cdot \dfrac{(\log_2 k + 2) \cdot (4 - k)}{2} \Leftrightarrow$

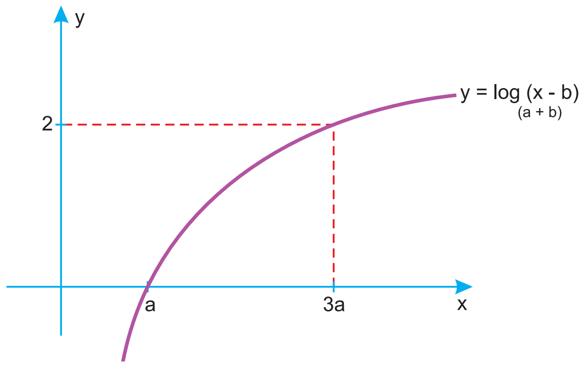
$\Leftrightarrow 2 - \log_2 k = \dfrac{1}{5} \cdot (\log_2 k + 2) \Leftrightarrow 5 \cdot (2 - \log_2 k) = \log_2 k + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 - 5 \cdot \log_2 k = \log_2 k + 2 \Leftrightarrow 6 \log_2 k = 8 \Leftrightarrow \log_2 k = \dfrac{8}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 k = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow k = 2^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{2^4} \Leftrightarrow k = 2\sqrt[3]{2}$

Resposta: C

17)



Para $x = a$, temos:

$y = \log_{(a+b)}(a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b) = (a + b)^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a - b = 1 \Leftrightarrow b = a - 1$

Para $x = 3a$, temos:

$y = \log_{(a+b)}(3a - b) = 2 \Leftrightarrow \log_{(a+a-1)}[3a - (a - 1)] = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{(2a-1)}(2a + 1) = 2 \Leftrightarrow 2a + 1 = (2a - 1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a + 1 = 4a^2 - 4a + 1 \Leftrightarrow 4a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow$

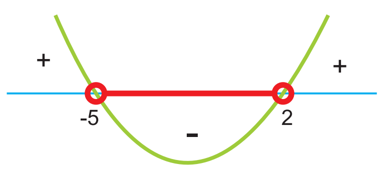
$\Leftrightarrow 2a \cdot (2a - 3) = 0 \Leftrightarrow 2a = 0$ (não serve) ou $2a = 3$

Resposta: B

18) I) $\log_{10}x + \log_{10}(x + 3) < 1 \Leftrightarrow \log_{10}x + \log_{10}(x + 3) < \log_{10}10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{10}[x \cdot (x + 3)] < \log_{10}10 \Leftrightarrow x \cdot (x + 3) < 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x < 10 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 2$

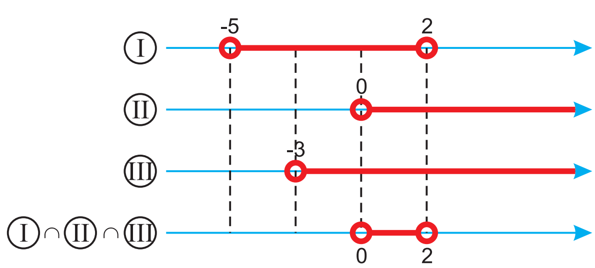


Verificando as condições de existência dos logaritmos, tem-se:

II) $x > 0$

III) $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

Assim,



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

Resposta: C

19) $\log_{0,4}[\log_2(0,5)^{x-5}] \geqslant \log_{0,4}(x + 2) \Leftrightarrow \log_2(0,5)^{x-5} \geqslant x + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 5) \cdot \log_2 0,5 \geqslant x + 2 \Leftrightarrow (x - 5) \cdot \log_2 2^{-1} \geqslant x + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 5) \cdot (-1) \cdot \log_2 2 \geqslant x + 2 \Leftrightarrow -x + 5 \geqslant x + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x \geqslant -3 \Leftrightarrow 2x \leqslant 3 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{3}{2}$

Pela condição de existência dos logaritmos, devemos ter:

$x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant \dfrac{3}{2}\right\}$

Resposta: C

20) I) $\log_2(2x + 5) - \log_2(3x - 1) > 1 \Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{2x + 5}{3x - 1}\right) > \log_2 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x + 5}{3x - 1} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x + 5}{3x - 1} - 2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x + 5 - (6x - 2)}{3x - 1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x + 7}{3x - 1} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-4x + 7) \cdot (3x - 1) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < x < \dfrac{7}{4}$

II) Analisando a condição de existência dos logaritmos, temos:

$$\begin{cases} 2x + 5 > 0 \\ 3x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{5}{2} \\ x > \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{3}$$

Portanto, $S = \left]\dfrac{1}{3}; \dfrac{7}{4}\right[$

Resposta: D

21) $1 \leqslant \log_{10}(x - 1) \leqslant 2 \Leftrightarrow \log_{10}10 \leqslant \log_{10}(x - 1) \leqslant \log_{10}10^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 \leqslant x - 1 \leqslant 10^2 \Leftrightarrow 11 \leqslant x \leqslant 101 \Leftrightarrow$

Resposta: C

22) $\log x = -4,3751157 = -4 - 0,3751157 =$

$= -4 - 1 + 1 - 0,3751157 = -5 + 0,6248843 = \bar{5},6248843$

A característica é -5 e a mantissa é 0,6248843.

Resposta: C

23) $\bar{2},4112 \cdot 3 = (-2 + 0,4112) \cdot 3 = -6 + 1,2336 =$

$= -6 + 1 + 0,2336 = -5 + 0,2336 = \bar{5},2336$

Resposta: A

24) $\bar{2},53112 + \bar{1},43001 + 0,37002 =$

$= -2 + 0,53112 + (-1 + 0,43001) + 0,37002 =$

$= -3 + 1,33115 = -3 + 1 + 0,33115 = -2 + 0,33115 = \bar{2},33115$

Resposta: C

25) a) $\log 200 = \log(2 \cdot 10^2) = \log 2 + \log 10^2 = 0,301 + 2 = 2,301;$

b) $\log 0,002 = \log(2 \cdot 10^{-3}) = \log 2 + \log 10^{-3} = 0,301 - 3 =$
$= -2,699 = \bar{3},301;$

c) $\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0,301 + 0,477 = 0,778;$

d) $\log 60 = \log(6 \cdot 10) = \log 6 + \log 10 = 0,778 + 1 = 1,778;$

e) $\log 1,5 = \log\left(\dfrac{15}{10}\right) = \log 15 - \log 10 = \log(3 \cdot 5) - 1 =$

$= \log 3 + \log 5 - 1 = 0,477 + \log\left(\dfrac{10}{2}\right) - 1 =$

$= 0,477 + \log 10 - \log 2 - 1 = 0,477 + 1 - 0,301 - 1 = 0,176;$

f) $\log_2 81 = \log_2 3^4 = 4 \cdot \log_2 3 = 4 \cdot \dfrac{\log 3}{\log 2} = 4 \cdot \dfrac{0,477}{0,301} =$

$= 4 \cdot 1,5847 = 6,339$

26) $\log 25 = \log 5^2 = 2 \cdot \log 5 = 2 \cdot \log\left(\dfrac{10}{2}\right) =$

$= 2 \cdot [\log 10 - \log 2] \cong 2 \cdot [1 - 0,3] = 1,4$

Resposta: A

27) $2^{555} = x \Leftrightarrow \log 2^{555} = \log x \Leftrightarrow 555 \cdot \log 2 = \log x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 555 \cdot 0,3 = \log x \Leftrightarrow \log x = 166,5 \Leftrightarrow x = 10^{166,5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 10^{0,5} \cdot 10^{166} \Leftrightarrow x = \sqrt{10} \cdot 10^{166}$

Assim sendo,

$p = \sqrt{10}$ e $q = 166$

Resposta: A

28) Se $N(t) = 10^5 \cdot 2^{4t}$, então:

I) Para $t = 0 \Rightarrow N(0) = 10^5 \cdot 2^{4 \cdot 0} \Rightarrow N(0) = 10^5$ é a quantidade inicial de bactérias

II) Para $N(t) = 100 \cdot N(0)$, devemos ter:

$10^5 \cdot 2^{4t} = 100 \cdot 10^5 \Leftrightarrow 2^{4t} = 10^2 \Leftrightarrow \log 2^{4t} = \log 10^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4t \cdot \log 2 = 2 \Leftrightarrow 4t \cdot 0,3 = 2 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{0,6} = \dfrac{10}{6}$

III) $\dfrac{10}{6}h = \dfrac{5}{3}h = \left(\dfrac{3}{3} + \dfrac{2}{3}\right)h = 1h + \dfrac{2}{3}h = 1h40min$

Resposta: C

29) Como a calculadora possui 12 digitos, quando digitarmos o número 42 000 000 000 e apertarmos a tecla log, o resultado que irá aparecer será:

Após apertar a 1ª vez:

$\log 42\,000\,000\,000 = 10,\underbrace{\overset{\text{mantissa 1}}{\ldots\ldots\ldots\ldots}}_{\text{com 10 casas decimais}} > 0$

Após apertar a 2ª vez:

$\log (10,\ldots\ldots) = 1,\underbrace{\overset{\text{mantissa 2}}{\ldots\ldots\ldots\ldots}}_{\text{com 11 casas decimais}} > 0$

Após apertar a 3ª vez:

$\log (1,\ldots\ldots) = 0,\underbrace{\overset{\text{mantissa 3}}{\ldots\ldots\ldots\ldots}}_{\text{com 11 casas decimais}} > 0$

Após apertar a 4ª vez:

$\log (0,\ldots\ldots) < 0$

Pela definição de logaritmos, não existe logaritmo de número negativo. Assim, se apertarmos a tecla log pela 5ª vez a mensagem "erro" irá aparecer no visor.

Resposta: D

30) $36^x = 24 \Leftrightarrow (2^2 \cdot 3^2)^x = 2^3 \cdot 3 \Leftrightarrow (2 \cdot 3)^{2x} = 2^3 \cdot 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log (2 \cdot 3)^{2x} = \log (2^3 \cdot 3) \Leftrightarrow 2x \cdot \log (2 \cdot 3) = \log (2^3 \cdot 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log (2^3 \cdot 3)}{2 \cdot \log (2 \cdot 3)} = \dfrac{3 \cdot \log 2 + \log 3}{2 \cdot (\log 2 + \log 3)} =$

$= \dfrac{3 \cdot 0,30 + 0,48}{2 \cdot (0,30 + 0,48)} = \dfrac{0,90 + 0,48}{2 \cdot 0,78} = \dfrac{1,38}{1,56} = \dfrac{138}{156} = \dfrac{69}{78}$

Resposta: B

FRENTE 2 – ÁLGEBRA E TRIGONOMETRIA

■ Módulo 1 – Definição e Operações com Conjuntos

1) O conjunto A = {1; 2; {2}; {3}; Ø} tem 5 elementos. A relação de pertinência desses elementos é:

$1 \in A$

$2 \in A$

$\{2\} \in A$

$\{3\} \in A$

$\emptyset \in A$

Assim, temos:

a) $1 \in A$ e $2 \in A$ (V)

b) $\{3\} \in A$ (V)

c) $3 \notin A$ (V)

d) $\{1\} \subset A$ (V)

e) $\{2\} \subset A$ (V)

f) $\{\{2\}, \{3\}\} \subset A$ (V)

g) $\{1; 3\} \not\subset A$ (V)

h) $\emptyset \in A$ (V)

i) $\{\emptyset\} \subset A$ (V)

j) $\emptyset \notin A$ (F), pois $\emptyset \in A$

k) $\{2\} \in A$ (V)

l) $\{1\} \in A$ (F), pois $\{1\} \notin A$

m) $5 \notin A$ (V)

n) $\{1; 2\} \subset A$ (V)

o) $\{\{2\}\} \not\subset A$ (V)

p) $\{1; 2; 4\} \not\subset A$ (V)

q) $\{3\} \not\subset A$ (V)

r) $\emptyset \subset A$ (V)

s) $A \subset A$ (V)

t) $\{4; \emptyset\} \not\subset A$ (V)

2) Sendo A = {3; {3}}, tem-se:

1) $3 \in A$ é verdadeira.

2) $\{3\} \subset A$ é verdadeira.

3) $\{3\} \in A$ é verdadeira

Resposta: D

3) I) $\{1; 2\} \subset X \Rightarrow 1 \in X$ e $2 \in X$

II) $X \subset \{1; 2; 3; 4\}$

De (I) e (II), podemos ter:

X = {1; 2} ou X = {1; 2; 3} ou X = {1; 2; 4} ou X = {1; 2; 3; 4}

Resposta: B

4) O conjunto {a; b; c; d; e; f; g} tem 7 elementos, então, o total de subconjuntos é $2^7 = 128$

Resposta: B

5) O conjunto A = {1; 3; 5} tem 3 elementos, então, o total de subconjuntos é $2^3 = 8$, incluindo o conjunto vazio. Logo, o número de subconjuntos não vazios é 8 – 1 = 7.

Resposta: A

6) **O conjunto formado pelos múltiplos estritamente positivos de 5, menores que 40, é {5; 10; 15; 20; 25; 30; 35} que possui 7 elementos e um total de $2^7 = 128$ subconjuntos, incluindo o conjunto vazio. Logo, o número de subconjuntos não vazios é n = 128 – 1 = 127.**
Resposta: A

7) **Para S = {1; 3; 5; 7; 9; 11}, A = {1; 3; 5} e B = {3; 5; 7; 9}, tem-se:**
I) $A \cup B$ = {1; 3; 5; 7; 9}
II) $A \cap B$ = {3; 5}
III) A – B = {1; 3; 5} – {3; 5; 7; 9} = {1}
IV) B – A = {3; 5; 7; 9} – {1; 3; 5} = {7; 9}
V) $\overline{B} = \complement_S^B$ = S – B = {1; 3; 5; 7; 9; 11} – {3; 5; 7; 9} = {1; 11}
Resposta: E

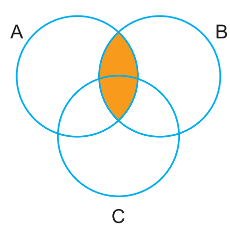
8) $\begin{cases} A = \{3; 7; x; 5; 9\} \\ B = \{1; 5; x; 8; y; 4\} \\ A \cap B = \{5; 6; 9\} \end{cases} \Rightarrow x = 6 \text{ e } y = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A = {3; 7; 6; 5; 9} e B = {1; 5; 6; 8; 9; 4}
01) É falsa, pois $A \cup B$ = {1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}
02) É verdadeira, pois A – B = {3; 7}
04) É falsa, pois $A \not\subset B$
08) É verdadeira, pois $8 \notin A$
16) É verdadeira, pois x + y = 6 + 9 = 15
Resposta: São verdadeiras 02, 08 e 16

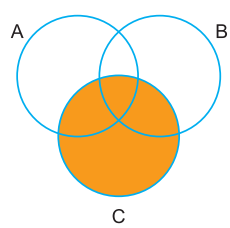
9) **Se $M \cup N$ = {1; 2; 3; 5} e $M \cup P$ = {1; 3; 4}, então:**
$M \cup N \cup P$ = {1; 2; 3; 5} $\cup$ {1; 3; 4} = {1; 2; 3; 4; 5}
Resposta: E

10) **Se existe $x \in A$ e $x \in B$, então existe $x \in A \cap B$, isto é, $A \cap B \neq \varnothing$**
Resposta: D

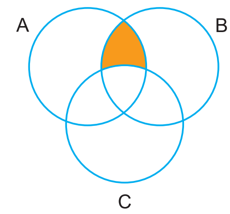
11) **I) Sombreando a região correspondente a $A \cap B$, tem-se:**



II) Sombreando a região correspondente ao conjunto C, tem-se:



III) A figura que representa $(A \cap B) – C$ é:

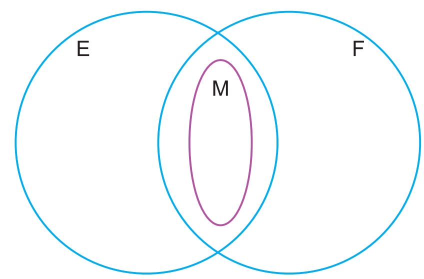


Resposta: A

12) **I) Todo jovem que gosta de matemática adora esportes $\Rightarrow$ $\Rightarrow M \subset E$**

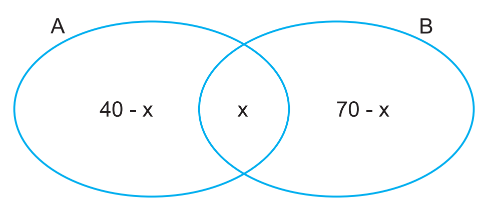
II) Todo jovem que gosta de matemática adora festas $\Rightarrow$ $\Rightarrow M \subset F$

III) $\begin{cases} M \subset E \\ M \subset F \end{cases} \Rightarrow M \subset (E \cap F)$, que pode ser representado por:



Resposta: C

13) **I) Representando num diagrama, tem-se:**

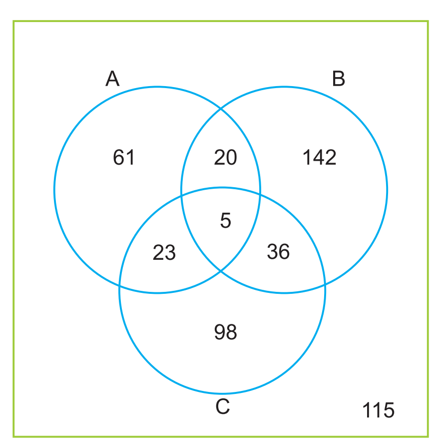


II) 40 – x + x + 70 – x = 100 $\Leftrightarrow$ x = 10

III) O percentual de leitores que leem os jornaius A e B é $\dfrac{10}{100} = 10\%$

Resposta: A

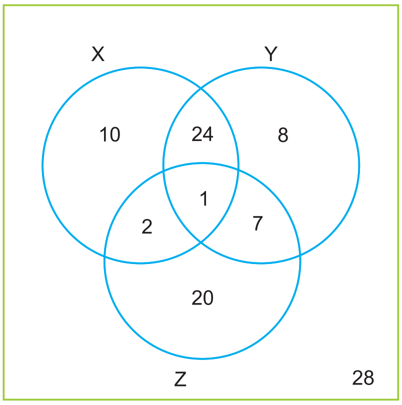
14) **I) Representando num diagrama, tem-se:**



II) O número de pessoas que consomem ao menos duas marcas é 20 + 23 + 36 + 5 = 84

Resposta: D

15) I) Representando num diagrama, em porcentagens, tem-se:



II) A porcentagem de entrevistados que não preferem nem X nem Y é (20 + 28)% = 48%

Resposta: D

■ Módulo 2 – Produto Cartesiano, Relações Binárias e Funções – Definição, Domínio, Contradomínio e Imagem

1) (0) V, (1) F, (2) F, (3) F, (4) V, (5) F

2) Se A = {1; 2}, B = {3; 4} e C = {4; 5}, tem-se:

I) B ∩ C = {3; 4} ∩ {4; 5} = {4}

II) A×(B ∩ C) = {1; 2} × {4} = {(1; 4); (2; 4)}

Resposta: A

3) I) {(0; 2), (0; 3), (1; 2), (2; 3)} ⊂ A×B ⇒ {0; 1; 2} ⊂ A e {2; 3} ⊂ B, sendo que A e B podem ter outros elementos.

II) A×B tem, no mínimo, 3.2 = 6 pares ordenados, entre eles estão necessariamente (1; 3) e (2; 2), portanto, pode-se afirmar que {(1; 3), (2; 2)} ⊂ A×B

Resposta: D

4) I) Se A = {5} e B = {3; 7}, então, A×B = {(5; 3); (5; 7)}

II) As relações binárias de A em B são os subconjuntos de A×B, isto é: Ø, {(5; 3)}, {(5; 7)} e A×B

Resposta: D

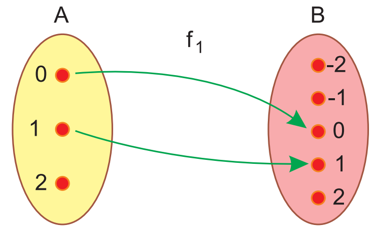
5) I) Se n(A) = m e n(B) = p, então, n(A×B) = n(A) . n(B) = m . p

II) O número de relações binárias de A em B é o número de subconjuntos de A×B, isto é, $2^{m\,.\,p}$, incluindo o conjunto vazio.

Assim, o número de relações não vazias é $2^{m\,.\,p} - 1$

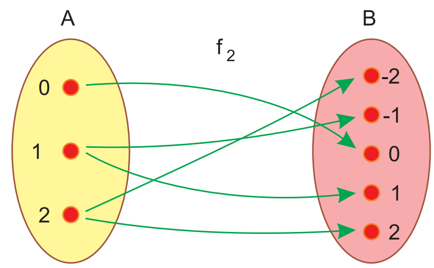
Resposta: D

6) a) f_1 = {(0; 0); (1; 1)}



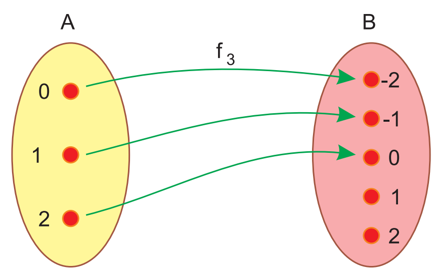
f_1 não é função, pois do elemento 2 não parte nenhuma flecha.

b) f_2 = {(0, 0), (1, –1), (1, 1), (2, –2), (2, 2)}



f_2 não é função, pois dos elementos 1 e 2 partem mais de uma flecha.

c) f_3 = {(0, – 2), (1, – 1), (2, 0)}



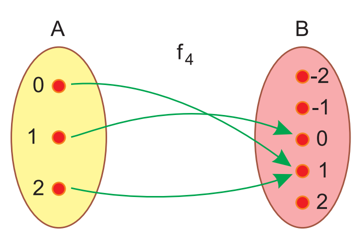
f_3 é uma função com:

D(f_3) = {0; 1; 2} = A

CD(f_3) = {– 2; – 1; 0; 1; 2} = B

Im(f_3) = {– 2; – 1; 0} ⊂ B.

d) f_4 = {(0, 1), (1, 0), (2, 1)}



f_4 é uma função com:

D (f_4) = {0; 1; 2} = A

CD (f_4) = {– 2; – 1; 0; 1; 2} = B

Im(f_4) = {0; 1} ⊂ B

7) a) f não é função, pois a reta vertical de abscissa 4 intercepta o gráfico em dois pontos.

b) g não é função, pois a reta vertical da abscissa 4 não intercepta o gráfico.

c) h é uma função com:
$D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 6\} = A$
$CD(h) = \mathbb{R}$
$Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \le y < 5\}$

8) Se $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{5}, \text{ se x é racional} \\ \dfrac{3}{4}, \text{ se x é irracional} \end{cases}$ e observando que

$\sqrt{2}$ é irracional, $\dfrac{3}{5}$ é racional e π é irracional, tem-se:

$$\frac{f(\sqrt{2}) + f\left(\frac{3}{5}\right)}{f(\pi)} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{15+8}{20}}{\frac{3}{4}} = \frac{23}{20} \cdot \frac{4}{3} = \frac{23}{15}$$

Resposta: E

9) I) $f(x) = 3x + 5 \Rightarrow f(1) = 3 \cdot 1 + 5 = 8$

II) $g(x) = \dfrac{f(x) + 8}{f(x) - 4} \Rightarrow g(1) = \dfrac{f(1) + 8}{f(1) - 4} = \dfrac{8 + 8}{8 - 4} = \dfrac{16}{4} = 4$

Resposta: C

10) Para $f(x) = \dfrac{3}{5} \cdot x - 1$ e $g(x) = \dfrac{4}{3} \cdot x + a$, tem-se:

I) $f(0) - g(0) = \dfrac{1}{3} \Rightarrow -1 - a = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a = -\dfrac{4}{3}$

II) $f(3) - 3 \cdot g\left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{3}{5} \cdot 3 - 1 - 3 \cdot \left(\dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{1}{5} - \dfrac{4}{3}\right) =$

$= \dfrac{9}{5} - 1 - 3 \cdot \left(\dfrac{4}{15} - \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{9}{5} - 1 - 3 \cdot \left(\dfrac{4 - 20}{15}\right) =$

$= \dfrac{9}{5} - 1 - 3 \cdot \left(\dfrac{-16}{15}\right) = \dfrac{9}{5} - 1 + \dfrac{16}{5} =$

$= \dfrac{25}{5} - 1 = 5 - 1 = 4$

Resposta: E

11) Para $h(t) = 1{,}5t - 9{,}4$ e $p(t) = 3{,}8t^2 - 72t + 246$, tem-se:
I) $h(t) = 35{,}6 \Rightarrow 1{,}5t - 9{,}4 = 35{,}6 \Leftrightarrow 1{,}5t = 45 \Leftrightarrow t = 30$
II) $p(30) = 3{,}8 \cdot 30^2 - 72 \cdot 30 + 246 = 3420 - 2160 + 246 = 1506$
Resposta: 1506 g

12) Sendo $C = \dfrac{5}{9} \cdot (F - 32)$, tem-se:

a) Para $C = 35 \Rightarrow 35 = \dfrac{5}{9} \cdot (F - 32) \Leftrightarrow 63 = F - 32 \Leftrightarrow F = 95$

b) Para $F = 2C \Rightarrow C = \dfrac{5}{9} \cdot (2C - 32) \Leftrightarrow 9C = 10C - 160 \Leftrightarrow C = 160$

Respostas: a) F = 95 b) C = 160

13) Para t = 16 e $d = 7{,}0 \cdot \sqrt{t - 12}$, temos:
$d = 7{,}0 \cdot \sqrt{16 - 12} = 7{,}0 \cdot \sqrt{4} = 7{,}0 \cdot 2 = 14{,}0$
Resposta: D

14) Considerando que domínio de uma função real é o conjunto dos valores reais para os quais a função existe, temos:

a) $f(x) = \dfrac{3x + 1}{2x - 8}$ existe para $2x - 8 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 4$
Assim, $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

b) $f(x) = \sqrt{2 - x}$ existe para $2 - x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 2$
Assim, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 2\}$

c) $f(x) = 2x + 5$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$
Assim, $D(f) = \mathbb{R}$

Respostas: a) $\mathbb{R} - \{4\}$ b) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \le 2 \}$ c) $\mathbb{R}$

15) A função $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x - 2}}$ existe para $3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{3}$

Assim $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{2}{3} \right\}$

Resposta: D

16) Para que a função $y = f(x) = \sqrt{x + 7} + \sqrt{1 - x}$ exista, devemos ter:

$\begin{cases} x + 7 \ge 0 \\ 1 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -7 \\ x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -7 \le x \le 1$

Resposta: B

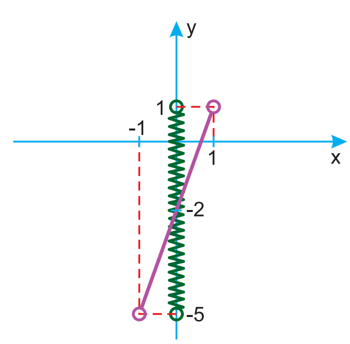
17) $f(x + 1) = \dfrac{3x + 5}{2x + 1}$ não existe para $x = -\dfrac{1}{2}$, isto é, não existe

$f\left(-\dfrac{1}{2} + 1\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Assim, se não existe $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, o domínio

da função f é $\mathbb{R} - \left\{ \dfrac{1}{2} \right\}$

Resposta: A

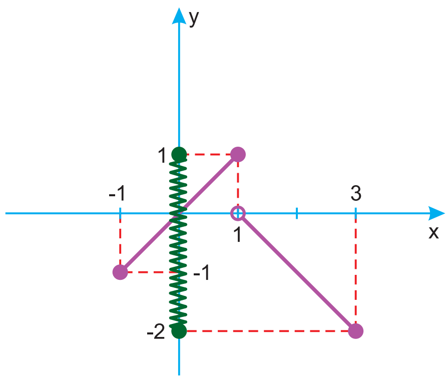
18) Na função $y = 3x - 2$, tem-se:
I) Para $x = -1 \Rightarrow y = 3 \cdot (-1) - 2 = -5$
II) Para $x = 1 \Rightarrow y = 3 \cdot 1 - 2 = 1$
Assim, o gráfico da função $y = 3x - 2$ para $x \in]-1; 1[$ é:



Portanto, o conjunto imagem é $]-5; 1[$
Resposta: E

19) Representando graficamente a função

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ para } -1 \le x \le 1 \\ -x + 1, \text{ para } 1 < x \le 3 \end{cases}, \text{ tem-se:}$$



Portanto, o conjunto imagem é [– 2; 1]

Resposta: A

Módulo 3 – Características e Propriedades da Função, Função Composta e Função Inversa

1) Para x em anos e f(x) em porcentagem da área da floresta a cada ano, temos de acordo com o gráfico:

$$\begin{cases} f(0) = 20 \\ f(6) = 50 \\ f(10) = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{200}{c} = 20 \Leftrightarrow c = 10 \\ \dfrac{6a + 200}{6b + 10} = 50 \\ \dfrac{10a + 200}{10b + 10} = 60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 200 = 300b + 500 \\ 10a + 200 = 600b + 600 \\ c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 50b = 50 \\ a - 60b = 40 \\ c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 100 \\ b = 1 \\ c = 10 \end{cases}$$

Portanto, $f(x) = \dfrac{100x + 200}{x + 10}$

Resposta: a = 100, b = 1 e c = 10

$$f(x) = \frac{100x + 200}{x + 10}$$

2) I) Graficamente, uma função é injetora quando nenhuma reta horizontal intercepta o gráfico mais de uma vez. Assim, não é injetora a função da alternativa “a”.

II) O gráfico da alternativa “c” não é função, pois existe reta vertical que intercepta o gráfico mais de uma vez.

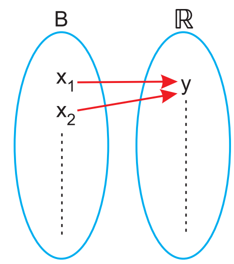
III) O gráfico da alternativa “e” não é função, pois existe reta vertical que não intercepta o gráfico com $x \in \mathbb{R}$.

IV) Uma função é sobrejetora quando Im = CD. Assim, não é sobrejetora a função da alternativa “b”, pois $CD = \mathbb{R} \ne Im = \mathbb{R}^*_+$.

V) Portanto, é bijetora (injetora e sobrejetora) a função da alternativa “d”.

Resposta: D

3) Se B é o conjunto formado por todos os brasileiros, a função $f: B \to \mathbb{R}$ que associa a cada brasileiro sua altura em centímetros, representada num diagrama de flechas, é:

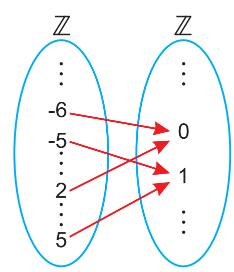


I) A função não é injetiva (injetora) pois existem elementos diferentes em B associados ao mesmo elemento em $\mathbb{R}$, observando que existe mais de uma pessoa com a mesma altura.

II) A função não é sobrejetiva (sobrejetora) pois $Im(f) \ne CD(f)$, observando que, por exemplo, não existem pessoas com altura negativa.

Resposta: D

4) Representando a função f num diagrama de flechas, tem-se:



I) A função não é sobrejetora, pois $Im(f) = \{0; 1\} \ne CD(f) = \mathbb{Z}$

II) A função não é injetora, pois $f(-5) = f(5) = 1$

III) $f(-5) \cdot f(2) = 1 \cdot 0 = 0$

IV) $f(-5) + f(5) = 1 + 1 = 2$

Resposta: E

5) Se $f: \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x^2 - 2x) = f(4 + x)$ é injetora, então:

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 4 + x \\ (x^2 - 2x) \in \mathbb{R}^*_+ \\ (4 + x) \in \mathbb{R}^*_+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ x^2 - 2x > 0 \\ 4 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ou } x = 4 \\ x^2 - 2x > 0 \\ 4 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 4$

Resposta: $x = -1$ ou $x = 4$

6) a) A função f é definida por $f(x) = \begin{cases} 11, \text{ se } x = 0 \\ x + 3, \text{ se } x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ x + 2, \text{ se } x \in \{6, 7, 8, 9\} \end{cases}$

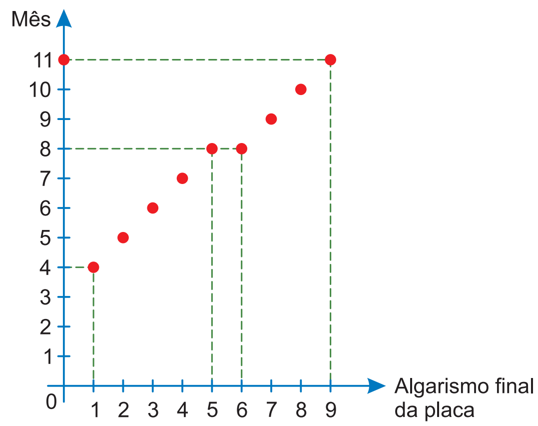
b) f não é injetora pois $f(5) = f(6) = 8$

c) Para os meses de agosto e novembro não se pode afirmar o final da placa, justamente por não ser injetora.

d) $f(x + 1) - f(x) = [x + 1 + 3] - [x + 3] = 1$, para x = 1, 2, 3, 4 e

$f(x + 1) - f(x) = [x + 1 + 2] - [x + 2] = 1$, para x = 6, 7, 8

e) O gráfico de f é



Resposta: A

7) Analisando o gráfico podemos concluir que

a) falsa

de janeiro a setembro de 2007 a arrecadação da Receita Federal ora aumentou ora diminuiu;

b) falsa

admitindo que a arrecadação da Receita Federal em setembro de 2007 tenha sido de R$ 46,2 bilhões, temos 46,2 . 1,1 = 50,82 > 48,48

c) falsa

admitindo que em janeiro de 2007a arrecadação da Receita Federal tenha sido de R$ 55 bilhões, temos:

55 . 1,1114 = 61,127 > 48,8

d) falsa

embora a arrecadação da Receita Federal tenha sido crescente de fevereiro a abril de 2007, e de maio a julho, ela foi decrescente de julho a agosto.

e) verdadeira

de fato, de julho a setembro de 2007 a arrecadação da Receita Federal foi decrescente.

Resposta: E

8) a) Falsa, pois $f(1) = 0$

b) Falsa, pois $D(f) = \mathbb{R}$

c) Falsa, pois $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

d) Verdadeira

e) Falsa, pois para $0 < x < 1$ f é decresccente

Resposta: D

9) Se f é uma função estritamente crescente e $f(2x - 7) < f(x - 1)$, então $2x - 7 < x - 1 \Leftrightarrow x < 6$

Resposta: A

10) Resposta: D

11) Se $f(x) = 2x$ e $g(x) = x + 3$, então:

a) $(gof)(2) = g(f(2)) = g(4) = 4 + 3 = 7$

b) $(gof)(3) = g(f(3)) = g(6) = 6 + 3 = 9$

c) $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 3$

Respostas: a) 7 b) 9 c) 2x + 3

12) Se $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = x - 2$, então:

a) $(fog)(0) = f(g(0)) = f(-2) = -8 + 1 = -7$

b) $(gof)(0) = g(f(0)) = g(1) = 1 - 2 = -1$

c) $(fof)(1) = f(f(1)) = f(2) = 8 + 1 = 9$

d) $(gof)(1) = g(g(1)) = g(-1) = -1 - 2 = -3$

Respostas: a) – 7 b) – 1 c) 9 d) – 3

13) Se $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = x^2$, então:

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(3x - 1) = (3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$

Resposta: A

14) Se $x \in \mathbb{N}$, o resto da divisão de x por 4 pertence ao conjunto $\{0; 1; 2; 3\}$, então, $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$ ou $f(x) = 2$ ou $f(x) = 3$.

Assim, para $g(x) = x^2 - 2x + 1$, tem-se:

I) Se $f(x) = 0 \Rightarrow (gof)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0^2 - 2 . 0 + 1 = 1$

II) Se $f(x) = 1 \Rightarrow (gof)(x) = g(f(x)) = g(1) = 1^2 - 2 . 1 + 1 = 0$

III) Se $f(x) = 2 \Rightarrow (gof)(x) = g(f(x)) = g(2) = 2^2 - 2 . 2 + 1 = 1$

IV) Se $f(x) = 3 \Rightarrow (gof)(x) = g(f(x)) = g(3) = 3^2 - 2 . 3 + 1 = 4$

Portanto, o conjunto imagem de gof é $\{0; 1; 4\}$, que é formado por três números quadrados perfeitos.

Resposta: C

15) Observando os gráficos das funções f e g, temos:

I) $f(4) = 0$

II) $(gof)(4) = g(f(4)) = g(0) = -4$

III) $g(1) = a$, com $a < 0$

IV) $(fog)(1) = f(g(1)) = f(a) = 2$, pois $a < 0$ e a função f é constante e igual a 2 para todo valor negativo.

Assim, $(gof)(4) + (fog)(1) = -4 + 2 = -2$

Resposta: D

16) Se $g(x) = 1 - x$ e $(fog)(x) = \dfrac{1 - x}{x}$, então:

I) $f(g(x)) = \dfrac{1 - x}{x}$

II) $g(x) = \dfrac{4}{3} \Rightarrow 1 - x = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x = 1 - \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

Assim, para $x = -\dfrac{1}{3}$, tem-se:

$$f(g(x)) = \frac{1 - x}{x} \Rightarrow f\left(g\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1 + \frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{1}{3}} = -4$$

Resposta: E

17) Se $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = ax + b$, então:

I) $f(g(x)) = f(ax + b) = 2(ax + b) + 3 = 2ax + 2b + 3$

II) $f(g(x)) = 8x + 7 \Rightarrow 2ax + 2b + 3 = 8x + 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2b + 3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 4 + 2 = 6$

Resposta: D

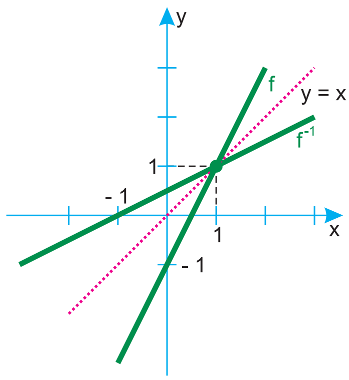
18) I) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 1 \Rightarrow y = 2x - 1$

II) Trocando x por y e y por x, temos:

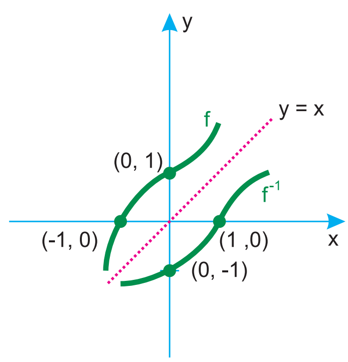
$$x = 2y - 1 \Leftrightarrow 2y = x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}, \text{ com } f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

III) Representando graficamente f e f^{-1}, temos:



19)



20) I) $f(x) = \dfrac{4x - 1}{3} \Rightarrow y = \dfrac{4x - 1}{3}$

II) Trocando x por y e y por x, temos:

$$x = \frac{4y - 1}{3} \Leftrightarrow 4y - 1 = 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y = 3x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3x + 1}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x + 1}{4}$$

Resposta: C

21) I) Sendo x o número pensado, o resultado obtido com a sequência de operações é $y = \dfrac{x^2 + 5}{2}$

II) Trocando x por y e y por x, temos:

$$x = \frac{y^2 + 5}{2} \Leftrightarrow y^2 + 5 = 2x \Leftrightarrow y^2 = 2x - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{2x - 5}, \text{ pois } y \in \mathbb{N}$$

Resposta: D

22) I) A função que fornece o salário y a partir do número de horas trabalhadas h, é:

$$y(h) = \begin{cases} 20h - 90, \text{ para } 0 \le h \le 160 \\ 20 \,.\, 160 + 24(h - 160) - 90, \text{ para } h > 160 \end{cases}$$

$$y(h) = \begin{cases} 20h - 90, \text{ para } 0 \le h \le 160 \\ 24h - 730, \text{ para } h > 160 \end{cases}$$

II) $y(160) = 20 \,.\, 160 - 90 = 3110$

III) Para $y \le 3110$, temos:

$$y(h) = 20h - 90 \Rightarrow y = 20 \,.\, h(y) - 90 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 \,.\, h(y) = y + 90 \Leftrightarrow h(y) = \frac{y + 90}{20}$$

IV) Para $y > 3110$, temos:

$$y(h) = 24h - 730 \Rightarrow y = 24 \,.\, h(y) - 730 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 \,.\, h(y) = y + 730 \Leftrightarrow h(y) = \frac{y + 730}{24}$$

V) A função que fornece o número de horas trabalhadas h a partir do salário y, é:

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{y + 90}{20}, \text{ para } y \le 3110 \\[2ex] \dfrac{y + 730}{24}, \text{ para } y > 3110 \end{cases}$$

Resposta: B

23) I) $f(x) = \dfrac{2 + x}{2 - x} \Rightarrow y = \dfrac{2 + x}{2 - x}$

II) Trocando x por y e y por x, temos:

$$x = \frac{2 + y}{2 - y} \Leftrightarrow 2 + y = 2x - xy \Leftrightarrow xy + y = 2x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y \,.\, (x + 1) = 2x - 2 \Leftrightarrow y = \frac{2x - 2}{x + 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x - 2}{x + 1}$$

III) $D(f^{-1}) = CD(f) = \mathbb{R} - \{a\} = \mathbb{R} - \{-1\}$, portanto, $a = -1$.

Resposta: D

■ Módulo 4 – Funções Trigonométricas de um Ângulo Agudo

1) Pitágoras: $2^2 = 1^2 + (AB)^2 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$

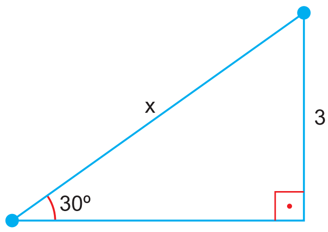
$\text{sen } B = \dfrac{1}{2}$, $\cos B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg } B = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{sen } C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos C = \dfrac{1}{2}$ e $\text{tg } C = \sqrt{3}$

2) $\text{sen } \alpha = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{x}{12} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = 8$

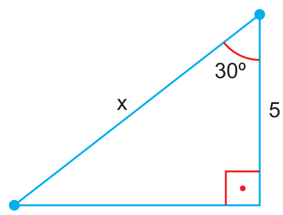
3) $\cos \alpha = 0{,}8 \Rightarrow \dfrac{x}{20} = 0{,}8 \Rightarrow x = 16$

4)



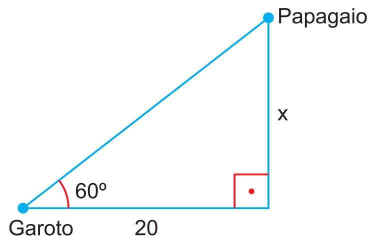
sen 30° = $\frac{3}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 6$

5)



cos 30° = $\frac{5}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

6)



tg 60° = $\frac{x}{20} \Rightarrow x = 20 \,.\, \sqrt{3} \Rightarrow x = 20 \,.\, 1{,}73 \Rightarrow x \simeq 34{,}6$

Resposta: C

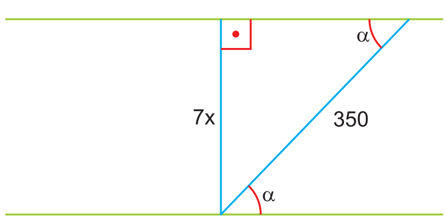
7) **Seja x, em metros, o comprimento da sombra do edifício:**

tg 30° = $\frac{80}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{80}{x} \Rightarrow x = \frac{240}{\sqrt{3}} \,.\, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 80 \,.\, \sqrt{3} \simeq 80 \,.\, 1{,}7 \simeq 136$

Resposta: A

8) **Seja x, em centímetros, a altura de cada degrau:**



I) cos α = $\frac{4}{5} \Rightarrow$ sen α = $\frac{3}{5}$

II) sen α = $\frac{7x}{350} \Rightarrow \frac{7x}{350} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = 30$

Resposta: C

9) **Seja x, em metros, o comprimento do cabo.**

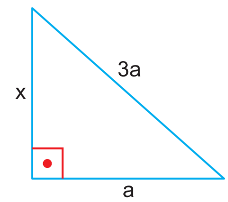
I) sen 30° = $\frac{120}{x} \Rightarrow 0{,}5 = \frac{120}{x} \Rightarrow x = 240$

II) 5% . 240 = 12

III) 240 + 12 = 252

Resposta: E

10)



I) **Pitágoras:** $(3a)^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 8a^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}a$, **logo o menor lado é a.**

II) **Seja α o ângulo oposto ao menor lado:**

cos α = $\frac{2\sqrt{2}a}{3a} \Rightarrow$ cos α = $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

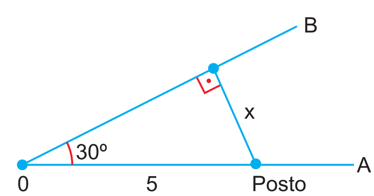
Resposta: B

11) I) tg 60° = $\frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = \sqrt{3}\,y$

II) tg 30° = $\frac{x}{300} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{300} \Rightarrow x = 100\sqrt{3}$

Então $100\sqrt{3} = \sqrt{3} \,.\, y \Rightarrow y = 100$

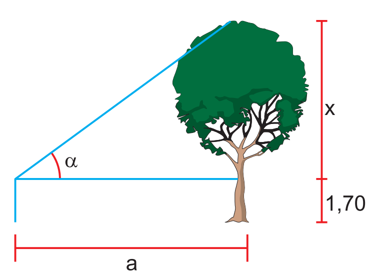
12)



sen 30° = $\frac{x}{5} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2{,}5$

Resposta: C

13)



I) tg α = $\frac{x}{a} \Rightarrow x = a \,.\,$ tg α

II) **A altura da árvore é 1,70 + x = 1,70 + a . tg α**

14) $\dfrac{\text{sec x + tg x}}{\text{cos x + cotg x}} = \dfrac{\dfrac{1}{\text{cos x}} + \dfrac{\text{sen x}}{\text{cos x}}}{\text{cos x} + \dfrac{\text{cos x}}{\text{sen x}}} =$

$= \dfrac{\dfrac{\text{1 + sen x}}{\text{cos x}}}{\dfrac{\text{sen x . cos x + cos x}}{\text{sen x}}} = \dfrac{\dfrac{\text{1 + sen x}}{\text{cos x}}}{\dfrac{\text{cos x . (1 + sen x)}}{\text{sen x}}} =$

$= \dfrac{\text{1 + sen x}}{\text{cos x}} \cdot \dfrac{\text{sen x}}{\text{cos x . (1 + sen x)}} =$

$= \dfrac{1}{\text{cos x}} \cdot \dfrac{\text{sen x}}{\text{cos x}} = \text{(sec x) . (tg x)}$

Resposta: D

15) $f(60°) = \text{sen } 60° + \cos 60° + \text{cotg } 60° +$

$+ \text{cossec } 60° - \text{tg } 60° - \sec 60°$

$f(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} - 2$

$f(60°) = \dfrac{3\sqrt{3} + 3 + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 12}{6}$

$f(60°) = \dfrac{3\sqrt{3} - 9}{6}$

$f(60°) = \dfrac{\sqrt{3} - 3}{2}$

Resposta: B

16) $\text{sen a + cos a = m} \Rightarrow \text{(sen a + cos a)}^2 = m^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2\text{a} + \text{2 sen a . cos a} + \cos^2\text{a} = m^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen a . cos a} = \dfrac{m^2 - 1}{2}$

Resposta: B

17) $y = \text{(sec a – cos a) . (cossec a – sen a) . (tg a + cotg a)} =$

$= \left(\dfrac{1}{\text{cos a}} - \text{cos a}\right) . \left(\dfrac{1}{\text{sen a}} - \text{sen a}\right) . \left(\dfrac{\text{sen a}}{\text{cos a}} + \dfrac{\text{cos a}}{\text{sen a}}\right) =$

$= \left(\dfrac{1 - \cos^2\text{a}}{\text{cos a}}\right) . \left(\dfrac{1 - \text{sen}^2\text{a}}{\text{sen a}}\right) . \left(\dfrac{\text{sen}^2\text{a} + \cos^2\text{a}}{\text{sen a . cos a}}\right) =$

$= \dfrac{\text{sen}^2\text{a}}{\text{cos a}} \cdot \dfrac{\cos^2\text{a}}{\text{sen a}} \cdot \left(\dfrac{1}{\text{sen a . cos a}}\right) =$

$= \text{sen a . cos a} . \left(\dfrac{1}{\text{sen a . cos a}}\right) = 1$

18) $y = \dfrac{\text{sen a – sen b}}{\text{cos a – cos b}} + \dfrac{\text{cos a + cos b}}{\text{sen a + sen b}} =$

$= \dfrac{\text{(sen a – sen b).(sen a + sen b)+(cos a + cos b).(cos a – cos b)}}{\text{(sen a + sen b).(cos a – cos b)}} =$

$= \dfrac{(\text{sen}^2\text{a} - \text{sen}^2\text{b}) + (\cos^2\text{a} - \cos^2\text{b})}{\text{(sen a + sen b).(cos a – cos b)}} =$

$= \dfrac{1 - 1}{\text{(sen a + sen b).(cos a – cos b)}} = 0$

19) Para tg x = t, temos:

$y = \dfrac{\text{sen}^2\text{x} + \text{sen x . cos x}}{\text{sen}^2\text{x} - \cos^2\text{x}} = \dfrac{\dfrac{\text{sen}^2\text{x}}{\cos^2\text{x}} + \dfrac{\text{sen x . cos x}}{\cos^2\text{x}}}{\dfrac{\text{sen}^2\text{x}}{\cos^2\text{x}} - \dfrac{\cos^2\text{x}}{\cos^2\text{x}}} =$

$= \dfrac{\text{tg}^2\text{x} + \text{tg x}}{\text{tg}^2\text{x} - 1} = \dfrac{t^2 + t}{t^2 - 1} = \dfrac{t\,.\,(t + 1)}{(t + 1).(t - 1)} = \dfrac{t}{t - 1}$

20) $\dfrac{\text{tg a + tg b}}{\text{cotg a + cotg b}} = \dfrac{\text{tg a + tg b}}{\dfrac{1}{\text{tg a}} + \dfrac{1}{\text{tg b}}} =$

$= \dfrac{\text{tg a + tg b}}{\dfrac{\text{tg b + tg a}}{\text{tg a . tg b}}} = \text{(tg a + tg b)} . \dfrac{\text{tg a . tg b}}{\text{(tg a + tg b)}} = \text{tg a . tg b}$

Resposta: A

21) Para $\cos x = \dfrac{1}{3}$, temos:

$y = \dfrac{\text{cossec x – sec x}}{\text{cotg x – 1}} = \dfrac{\dfrac{1}{\text{sen x}} - \dfrac{1}{\text{cos x}}}{\dfrac{\text{cos x}}{\text{sen x}} - 1} =$

$= \dfrac{\dfrac{\text{cos x – sen x}}{\text{sen x . cos x}}}{\dfrac{\text{cos x – sen x}}{\text{sen x}}} = \dfrac{\text{cos x – sen x}}{\text{sen x . cos x}} \cdot \dfrac{\text{sen x}}{\text{cos x – sen x}} =$

$= \dfrac{1}{\text{cos x}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3}} = 3$

22) Para $\text{tg a} = \dfrac{1}{2}$, temos:

$y = \dfrac{\text{cossec a – sen a}}{\text{sec a – cos a}} = \dfrac{\dfrac{1}{\text{sen a}} - \text{sen a}}{\dfrac{1}{\text{cos a}} - \text{cos a}} =$

$$= \frac{\frac{1 - sen^2a}{sen\ a}}{\frac{1 - cos^2a}{cos\ a}} = \frac{\frac{cos^2a}{sen\ a}}{\frac{sen^2a}{cos\ a}} =$$

$$= \frac{cos^2a}{sen\ a} \cdot \frac{cos\ a}{sen^2a} = \frac{cos^3a}{sen^3a} =$$

$$= cotg^3a = \frac{1}{tg^3a} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

23) Para $sen\ x = \frac{1}{3}$, temos:

$cos^4x - sen^4x = (cos^2x + sen^2x).(cos^2x - sen^2x) =$

$= \ 1 \cdot (1 - sen^2x - sen^2x) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$

Resposta: A

FRENTE 3 – ÁLGEBRA E GEOMETRIA PLANA

■ Módulo 1 – Potenciação

1) $1^4 = 1$

2) $0^3 = 0$

3) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

4) $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

5) $-5^3 = -(5 \cdot 5 \cdot 5) = -125$

6) $5^2 = 25$

7) $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$

8) $-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$

9) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

10) $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$

11) $-5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = \frac{-1}{25}$

12) $5^0 = 1$

13) $(-5)^0 = 1$

14) $-5^0 = -(5^0) = -1$

15) $(-1)^0 + (-6) : (-2) - 2^4 = 1 - 6 : (-2) - 16 = 1 + 3 - 16 = -12$

Resposta: B

16) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4} + \left(\frac{2}{1}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{10}{1} = \frac{49}{4}$

Resposta: E

17) $\frac{3^{-1} + 5^{-1}}{2^{-1}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5+3}{15}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{1} = \frac{16}{15}$

Resposta: D

18) $\frac{(-5)^2 - 3^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^0}{3^{-2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}} = \frac{25 - 9 + 1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}} = \frac{17}{\frac{73}{90}} =$

$= \frac{17 \cdot 90}{73} = \frac{1530}{73}$

Resposta: C

19) $\frac{2^{100}}{2^1} = 2^{100-1} = 2^{99}$

Resposta: C

20) número de pessoas = $6 \cdot 6 \cdot 6 + 1 = 6^3 + 1 = 217$

Resposta: A

21) I) $x = (2^2)^3 = 2^6$

II) $y = 2^{2^3} = 2^{2.2.2} = 2^8$

III) $z = 2^{3^2} = 2^{3.3} = 2^9$

IV) $x \cdot y \cdot z = 2^6 \cdot 2^8 \cdot 2^9 = 2^{6+8+9} = 2^{23} = 2^n \Leftrightarrow n = 23$

22) $\frac{(5,2)^4 \cdot (10,3)^3}{(9,9)^2} \cong \frac{5^4 \cdot 10^3}{10^2} \cong 5^4 \cdot 10 \cong 6250$

Resposta: E

23) I) 1 caracter = 8 bits = 1 byte

II) 1 Kb = 2^{10} bytes

III) 1 Mb = 2^{10} Kb

IV) 1 Gb = 2^{10} Mb

V) n = 160 Gb = $160 \cdot 2^{10}$ Mb = $160 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}$ Kb =

= $160 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}$ bytes = $160 \cdot 2^{30}$ caracteres

Resposta: B

24) a) $a = 3^3 = 27$

$b = (-2)^3 = -8$

$c = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$d = (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{-1}{8}$

b) ordem crescente: $b < d < c < a$

25) I) $M_{sol} = 1,98 \cdot 10^{30}$ kg = $19,8 \cdot 10^{29}$ kg

II) $M_{gli} = \frac{1}{3} M_{sol} = \frac{19,8 \cdot 10^{29}}{3}$ kg =

= $6,6 \cdot 10^{29}$ kg = $\frac{6,6 \cdot 10^{29}}{10^3}$ t = $6,6 \cdot 10^{26}$ t

Resposta: D

26) $(0,2)^3 + (0,16)^2 = \underbrace{0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2}_{0,008} + \underbrace{0,16 \cdot 0,16}_{0,0256} = 0,0336$

Resposta: B

27) a) *Verdadeira*: $x^2 = 4 \Rightarrow (x^2)^3 = (4)^3 \Rightarrow x^6 = 64$

b) *Falsa*: $x^6 = 64 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[6]{64} = \pm \sqrt[6]{2^6} = \pm 2$

c) *Verdadeira*: $(2^2)^3 < 2^{2^3} \Rightarrow 2^6 < 2^8$

d) *Verdadeira*: $10^x = 0{,}2 \Rightarrow (10^x)^2 = (0{,}2)^2 \Rightarrow 10^{2x} = 0{,}04$

e) *Verdadeira*: $2^{n+2} + 2^n = 2^n \,.\, 2^2 + 2^n = 2^n(2^2 + 1) = 5 \,.\, 2^n$

Resposta: B

28) $\dfrac{2^{n+4} - 2 \,.\, 2^n}{2 \,.\, 2^{n+3}} = \dfrac{2^n.\, 2^4 - 2 \,.\, 2^n}{2 \,.\, 2^n \,.\, 2^3} =$

$= \dfrac{2^n(2^4 - 2)}{2^n \,.\, 2^4} = \dfrac{16 - 2}{16} = \dfrac{7}{8}$

Resposta: B

29) $5^{3a} = 64 \Rightarrow (5^a)^3 = (4)^3 \Leftrightarrow 5^a = 4^1 \Leftrightarrow 5^{-a} = 4^{-1} = \dfrac{1}{4}$

Resposta: E

30) $10^{2x} = 25 \Rightarrow (10^x)^2 = (5)^2 \Leftrightarrow 10^x = 5 \Leftrightarrow 10^{-x} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$

Resposta: B

31) $7^{5y} = 243 \Rightarrow (7^y)^5 = (3)^5 \Leftrightarrow 7^y = 3 \Leftrightarrow 7^{-y} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

Resposta: A

32) $2^{31} \,.\, 5^{26} = 2^5 \,.\, 2^{26} \,.\, 5^{26} = 32 \,.\, (2 \,.\, 5)^{26} = \underbrace{32 \,.\, 10^{26}}_{\text{28 algarismos}}$

Resposta: C

33) $6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 = 6 \,.\, 6^6 = 6^7$

Resposta: B

Módulo 2 – Radiciação

1) $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$

2) $-\sqrt{81} = -\sqrt{9^2} = -9$

3) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

4) $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

5) $\sqrt{8 + \sqrt{14 + \sqrt[3]{6 + \sqrt{4}}}} = \sqrt{8 + \sqrt{14 + \sqrt[3]{6 + 2}}} =$

$= \sqrt{8 + \sqrt{14 + \sqrt[3]{8}}} = \sqrt{8 + \sqrt{14 + 2}} = \sqrt{8 + \sqrt{16}} =$

$= \sqrt{8 + 4} = \sqrt{12} = \sqrt{3 \,.\, 4} = \sqrt{3} \,.\, \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$

Resposta: A

6) $\sqrt{2352} = \sqrt{2^4.3^1.7^2} = 2^2.7^1.\sqrt{3} = 28\sqrt{3}$

Resposta: C

7) $\sqrt{8} - \sqrt{18} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2 \,.\, 2^2} - \sqrt{2 \,.\, 3^2} + 2\sqrt{2} =$

$= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Resposta: A

8) $\sqrt{18} + \sqrt{50} = \sqrt{2 \,.\, 3^2} + \sqrt{2 \,.\, 5^2} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

Resposta: C

9) I) $7^3 = 343$

II) $8^3 = 512$

III) $343 < 389 < 512 \Rightarrow \sqrt[3]{343} < \sqrt[3]{389} < \sqrt[3]{512} \Rightarrow 7 < \sqrt[3]{389} < 8$

Resposta: B

10) I) $A = \sqrt{3} \,.\, \sqrt{13} = \sqrt{3.13} = \sqrt{39}$

II) $6^2 = 36$

III) $7^2 = 49$

IV) $36 < 39 < 49 \Rightarrow \sqrt{36} < \sqrt{39} < \sqrt{49} \Rightarrow 6 < A < 7$

Resposta: A

11) $\sqrt[3]{7 + \sqrt{3 - \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} = \sqrt[3]{7 + \sqrt{3 - \sqrt{1 + 3}}} =$

$= \sqrt[3]{7 + \sqrt{3 - 2}} = \sqrt[3]{7 + 1} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

Resposta: D

12) $\sqrt[3]{\dfrac{2^{28} + 2^{30}}{10}} = \sqrt[3]{\dfrac{1 \,.\, 2^{28} + 2^2 \,.\, 2^{28}}{10}} = \sqrt[3]{\dfrac{5 \,.\, 2^{28}}{10}} =$

$= \sqrt[3]{\dfrac{2^{28}}{2}} = \sqrt[3]{2^{27}} = \sqrt[3]{(2^9)^3} = 2^9$

Resposta: D

13) $2\sqrt{2\sqrt[3]{2}} = 2\sqrt{\sqrt[3]{2 \,.\, 2^3}} = 2\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6]{2^4.2^6} =$

$= \sqrt[6]{2^{10}} = \sqrt[2.3]{2^{2\,.\,5}} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32}$

14) $a.\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}} = \sqrt{a^{-1}.a^2\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{-1}.\sqrt{a^{-1}}}} =$

$= \sqrt{\sqrt{a^{-1}.\, a^2\sqrt{a^{-1}}}} = \sqrt{\sqrt{a \,.\sqrt{a^{-1}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a^{-1}.a^2}}} =$

$= \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} = \sqrt[8]{a}$

Resposta: D

15) $\begin{cases} y = 16 \\ x = 1{,}25 \end{cases} \Rightarrow y^x = 16^{1{,}25} = (2^4)^{1{,}25} = 2^5 = 32$

Resposta: D

16) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)\,.\,(\sqrt{3}+1)} =$

$= \dfrac{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \dfrac{8}{2} = 4$

Resposta: B

17) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\,.\,\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}+3}{3}$

Resposta: D

18) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\,.\,\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{2\sqrt{2} + 2 - 2 - \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

Resposta: A

■ Módulo 3 – Fatoração

1) $12a^3b^2 - 30a^2b^3 = 6a^2b^2(2a - 5b)$

2) $6ab + 4b^3 + 15a^3 + 10a^2b^2 =$

$= 2b(3a + 2b^2) + 5a^2(3a + 2b^2) = (3a + 2b^2)\,.\,(2b + 5a^2)$

3) $ab + a + b + 1 = a(b + 1) + 1(b + 1) = (b + 1)\,.\,(a + 1)$

4) $ab + a - b - 1 = a(b + 1) - 1(b + 1) = (b + 1)\,.\,(a - 1)$

5) $xy + 3x + 4y + 12 = x(y + 3) + 4(y + 3) = (y + 3)\,.\,(x + 4)$

6) $\dfrac{ab + a + b + 1}{ab - a + b - 1} = \dfrac{a(b + 1) + 1(b + 1)}{a(b - 1) + 1(b - 1)} =$

$= \dfrac{(b + 1)\,.\,(a + 1)}{(b - 1)\,.\,(a + 1)} = \dfrac{b + 1}{b - 1}$

7) $a^2 - 25 = a^2 - 5^2 = (a + 5)\,.\,(a - 5)$

8) $x^2 - 1 = (x + 1)\,.\,(x - 1)$

9) $144 - 81a^2b^2 = 9\,.\,(16 - 9a^2b^2) = 9\,.\,(4 + 3ab)\,.\,(4 - 3ab)$

10) $x^4 - 1 = (x^2)^2 - (1)^2 = (x^2 + 1)\,.\,(x^2 - 1) = (x^2 + 1)\,.\,(x + 1)\,.\,(x - 1)$

11) $\left(1 - \dfrac{1}{3}\right).\left(1 + \dfrac{1}{3}\right).\left(1 + \dfrac{1}{9}\right).\left(1 + \dfrac{1}{81}\right).\left(1 + \dfrac{1}{6561}\right) =$

$= \left(1 - \dfrac{1}{9}\right).\left(1 + \dfrac{1}{9}\right).\left(1 + \dfrac{1}{81}\right).\left(1 + \dfrac{1}{6561}\right) =$

$= \left(1 - \dfrac{1}{81}\right).\left(1 + \dfrac{1}{81}\right).\left(1 + \dfrac{1}{6561}\right) =$

$= \left(1 - \dfrac{1}{6561}\right).\left(1 + \dfrac{1}{6561}\right) = 1 - \left(\dfrac{1}{6561}\right)^2 = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{16}$

Resposta: A

12) $934287^2 - 934286^2 = (934287 + 934286)\,.\,(934287 - 934286) =$

$= 1868573\,.\,1 = 1868573$

Resposta: A

13) Para $x = -0{,}1$ e $y = 0{,}001$, temos:

$\dfrac{-x^2 + xy}{y} = \dfrac{-x\,(x - y)}{y} =$

$= \dfrac{0{,}1(-0{,}1 - 0{,}001)}{0{,}001} = \dfrac{0{,}1(-0{,}101)}{0{,}001} =$

$= -0{,}1\,.\,\dfrac{0{,}101}{0{,}001} = \dfrac{-1}{10}\,.\,101 = -10{,}1$

14) Para $a = 0{,}1$ e $b = 0{,}2$, temos:

$\dfrac{a^2b^2 - a^3b}{b^2 - a^2} = \dfrac{a^2b(b - a)}{(b + a)(b - a)} =$

$= \dfrac{a^2b}{a + b} = \dfrac{(0{,}1)^2\,.\,0{,}2}{0{,}1 + 0{,}2} = \dfrac{0{,}002}{0{,}3} = \dfrac{2\,.\,10^{-3}}{3\,.\,10^{-1}} =$

$= \dfrac{2}{3}\,.\,10^{-2} = \dfrac{2}{3\,.\,100} = \dfrac{1}{3\,.\,50} = \dfrac{1}{150}$

Resposta: B

15) Para $x = -0{,}1$ e $y = 0{,}01$, temos:

$\dfrac{xy - x^2}{\sqrt{y}} = \dfrac{x(y - x)}{\sqrt{y}} = \dfrac{-0{,}1(0{,}01 + 0{,}1)}{\sqrt{0{,}01}} =$

$= \dfrac{-0{,}1\,.\,0{,}11}{\sqrt{\dfrac{1}{100}}} = \dfrac{-0{,}1\,.\,0{,}11}{0{,}1} = -0{,}11$

Resposta: A

16) $(2 + 3m)^2 = 2^2 + 2\,.\,2\,.\,3m + (3m)^2 = 4 + 12m + 9m^2$

17) $(a - 3)^2 = a^2 - 2\,.\,a\,.\,3 + (3)^2 = a^2 - 6a + 9$

18) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}\,.\,\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{15} + 3 =$

$= 8 + 2\sqrt{15}$

19) $a^2 + 4a + 4 = a^2 + 2\,.\,2\,.\,a + 2 = (a + 2)^2$

20) $9a^2 + 30ab + 25b^2 = (3a)^2 + 2\,.\,(3a)\,.\,(5b) + (5b)^2 = (3a + 5b)^2$

21) $1 - 18x^2 + 81x^4 = 1^2 + 2\,.\,1\,.\,(-9x^2) + (-9x^2)^2 = (1 - 9x^2)^2$

22) $\dfrac{a^3 + a^2b}{a^2 + 2ab + b^2} = \dfrac{a^2\,(a + b)}{(a + b)^2} = \dfrac{a^2}{(a + b)}$

23) $\dfrac{x^2 + xy}{xy - y^2}\,.\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 2xy} = \dfrac{x(x + y)\,.\,(x + y)\,.\,(x - y)}{y(x - y)\,.\,(x + y)^2} =$

$= \dfrac{x(x - y)\,.\,(x + y)^2}{y(x - y)\,.\,(x + y)^2} = \dfrac{x}{y}$

Resposta: E

24) $\dfrac{2x^2+x+3}{x^2+2x+1} - \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{2x^2+x+3-[(x+2).(x+1)]}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{2x^2+x+3-x^2-3x-2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2-2x+1}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$

Resposta: A

25) $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right) . \dfrac{a+b}{2ab} =$

$= \left(\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b).(a+b)}\right) . \dfrac{a+b}{2ab} =$

$= \left(\dfrac{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)}{(a-b).(a+b)}\right) . \dfrac{a+b}{2ab} =$

$= \dfrac{4ab}{(a-b).(a+b)} . \dfrac{(a+b)}{2ab} = \dfrac{2}{a-b}$

Resposta: B

26) $(\sqrt{12}+\sqrt{3}+1)^2 = (2\sqrt{3}+\sqrt{3}+1)^2 = (3\sqrt{3}+1)^2 =$

$= (3\sqrt{3})^2 + 2 . 3\sqrt{3} + (1)^2 = 28 + 6\sqrt{3} = a + b\sqrt{3} \Leftrightarrow a = 28$ e $b = 6$

Resposta: E

27) I) $M = a + \dfrac{b-a}{1+ab} = \dfrac{a(1+ab)+b-a}{(1+ab)} =$

$= \dfrac{a^2b+b}{(1+ab)} = \dfrac{b(a^2+1)}{(ab+1)}$

II) $N = 1 - \dfrac{ab-a^2}{1+ab} = \dfrac{1(1+ab)-(ab-a^2)}{(1+ab)} =$

$= \dfrac{1+a^2}{1+ab} = \dfrac{(a^2+1)}{(ab+1)}$

III) $\dfrac{M}{N} = \dfrac{\dfrac{b(a^2+1)}{ab+1}}{\dfrac{a^2+1}{ab+1}} = \dfrac{b(a^2+1)}{a^2+1} = b$

Resposta: B

28) $\dfrac{a+b}{a^2-ab} . \dfrac{a^2b-ab^2}{a^2b-b^3} = \dfrac{(a+b).ab(a-b)}{a(a-b).b(a^2-b^2)} =$

$= \dfrac{(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \dfrac{1}{(a-b)}$

Resposta: B

29) $y = \dfrac{2x^2}{x^2-1} - \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{2x^2.(1)-x(x+1)}{(x+1).(x-1)} =$

$= \dfrac{2x^2-x^2-x}{(x+1).(x-1)} = \dfrac{x^2-x}{(x+1).(x-1)} =$

$= \dfrac{x(x-1)}{(x+1).(x-1)} = \dfrac{x}{x+1}$

Resposta: E

30) $\dfrac{2x-1}{x-2} - \dfrac{3x+2}{x^2-4} = \dfrac{(2x-1).(x+2)-(3x+2)}{(x+2).(x-2)} =$

$= \dfrac{2x^2+4x-4x-4}{(x+2).(x-2)} = \dfrac{2x^2-4}{(x+2).(x-2)} = \dfrac{2(x^2-2)}{x^2-4}$

Resposta: A

31) Para $x = 4$ e $y = \sqrt{3}$, temos:

$\dfrac{(x^4-y^4).(x+y)^2}{(x^2+y^2).(x^2+2xy+y^2)} =$

$= \dfrac{(x^2+y^2).(x^2-y^2).(x^2+2xy+y^2)}{(x^2+y^2).(x^2+2xy+y^2)} = x^2 - y^2 =$

$= 4^2 - (\sqrt{3})^2 = 16 - 3 = 13$

32) Se $m+n+p = 6$, $mnp = 2$ e $mn+mp+np = 11$, então:
$(m+n+p)^2 = 6^2 \Leftrightarrow m^2+n^2+p^2+2(mn+mp+np) = 36 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m^2+n^2+p^2+2 . 11 = 36 \Leftrightarrow m^2+n^2+p^2 = 14$

Portanto, $\dfrac{m^2+n^2+p^2}{mnp} = \dfrac{14}{2} = 7$

Resposta: B

33) $a^2+b^2-c^2-2ab = (a^2-2ab+b^2)-c^2 = (a-b)^2-(c)^2 =$
$= [(a-b)+c] . [(a-b)-c] = (a-b+c) . (a-b-c)$

34) $(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b) . c + c^2 =$
$= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

35) $x + \dfrac{1}{x} = b \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 . x . \dfrac{1}{x} = b^2 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = b^2 - 2$

■ Módulo 4 – Introdução ao Estudo da Geometria Plana e Triângulos

1) Como r // s, então A + B = 180° e, pelo enunciado, B = 3A, assim:
A + B = 180° ⇒ A + 3A = 180° ⇔ 4A = 180° ⇔
⇔ $A = \dfrac{180°}{4} = 45°$ e B = 3A = 3 . 45° = 135°
Logo, B – A = 135° – 45° = 90°
Resposta: A

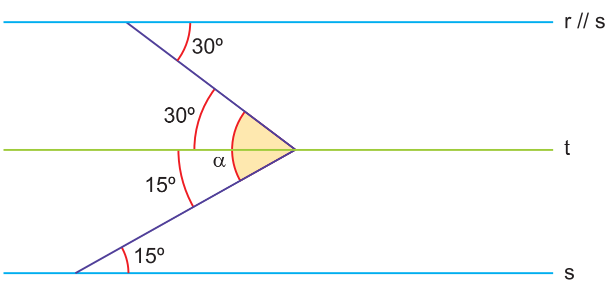
2) $x - 25° + 2x + 40° = 180°$ (os ângulos são colaterais) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x + 15° = 180° \Leftrightarrow 3x = 180° - 15° \Leftrightarrow 3x = 165° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{165°}{3} \Leftrightarrow x = 55°$

Resposta: A

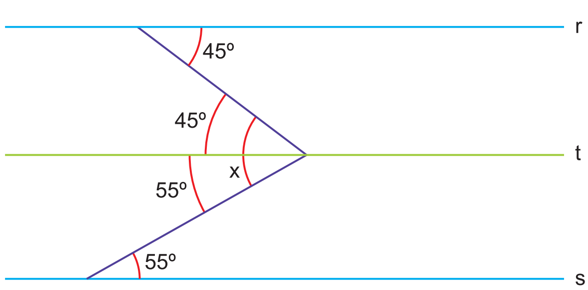
3)



Traçando uma reta t, pelo vértice do ângulo α, paralela às retas r e s, tem-se: $\alpha = 15° + 30° \Leftrightarrow \alpha = 45°$

Resposta: D

4)

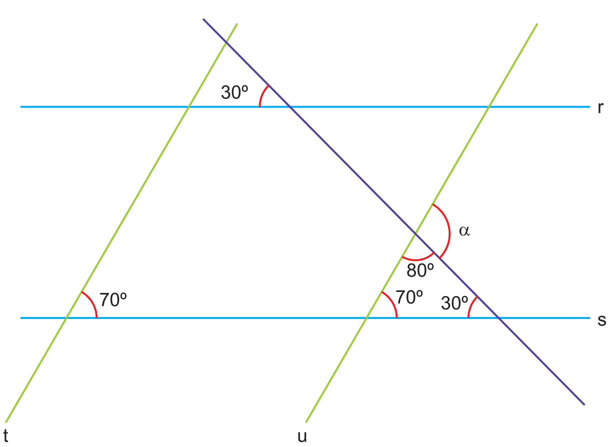


Traçando uma reta t, pelo vértice do ângulo 3, paralela às retas r e s, e sendo x a medida do ângulo 3, tem-se:

$x = 45° + 55° = 100°$

Resposta: E

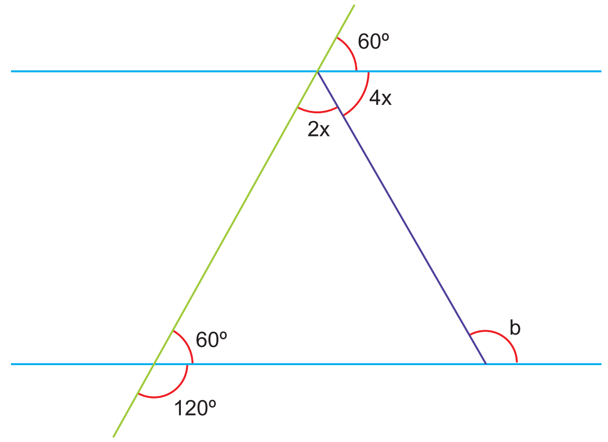
5)



$\alpha + 80° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 180° - 80° \Leftrightarrow \alpha = 100°$

Resposta: A

6) **Conforme a figura:**



$2x + 4x + 60° = 180° \Leftrightarrow 6x = 180° - 60° \Leftrightarrow$

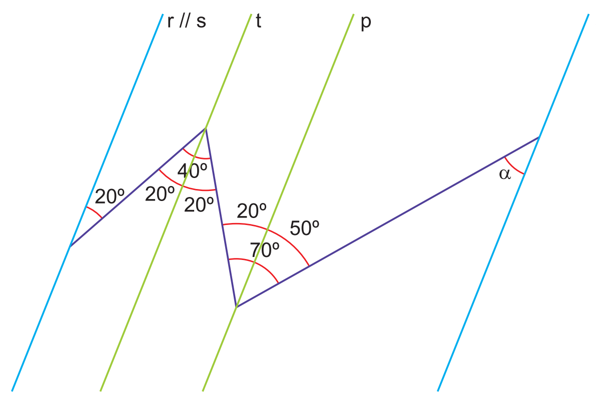
$\Leftrightarrow 6x = 120° \Leftrightarrow x = \dfrac{120°}{6} \Leftrightarrow x = 20°$

Pelo teorema do ângulo externo, no triângulo,

$b = 60° + 2x = 60° + 2 \,.\, 20° = 60° + 40° = 100°$

Resposta: A

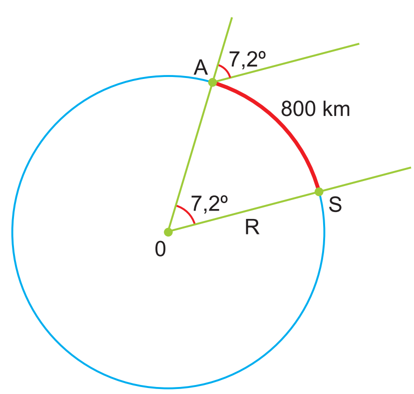
7) **Traçando as retas t e p, pelos vértices dos ângulos 40° e 70°, respectivamente, paralelas às retas r e s, tem-se:**



$\alpha = 50°$

Resposta: D

8)



ângulo central	comprimento do arco
7,2°	800 km
360°	C

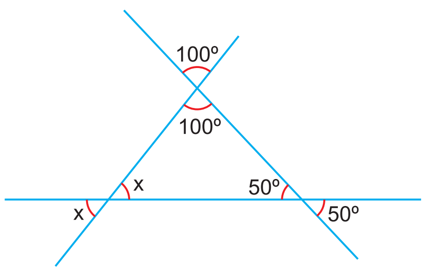
Como as grandezas são diretamente proporcionais, tem-se:

$$\frac{7{,}2°}{360°} = \frac{800\text{ km}}{C} \Leftrightarrow \frac{1}{50} = \frac{800\text{ km}}{C} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow C = 50 \cdot 800\text{ km} = 40\,000\text{ km}$

Resposta: 40 000 km

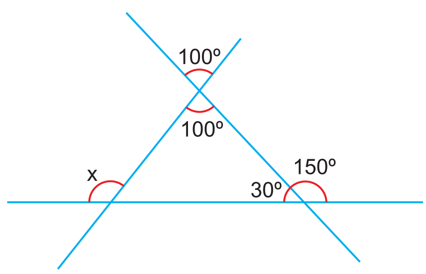
9)



$x + 100° + 50° = 180° \Leftrightarrow x = 180° - 100° - 50° = 30°$

Resposta: A

10)

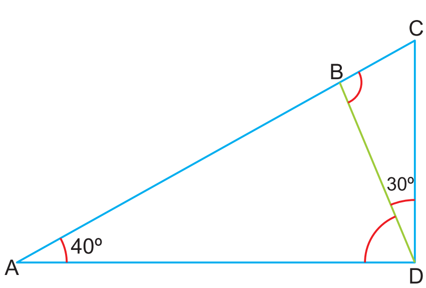


Pelo Teorema do ângulo externo,

$x = 100° + 30° \Leftrightarrow x = 130°$

Resposta: E

11)



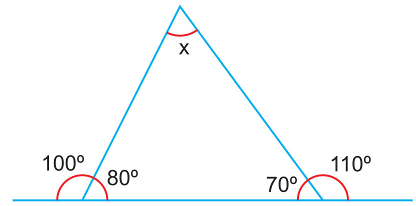
I) $A\hat{D}C = 90° \Rightarrow A\hat{D}B = 90° - 30° = 60°$

II) $\hat{C} = 180° - 90° - 40° \Leftrightarrow \hat{C} = 50°$

III) No triângulo BCD, $C\hat{B}D = 180° - 50° - 30° = 100°$

Resposta: B

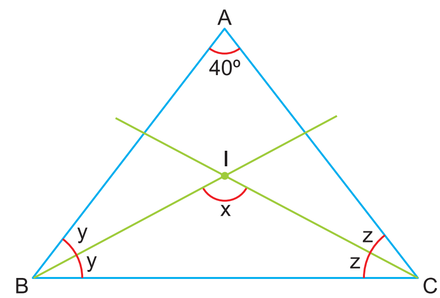
12)



$x + 80° + 70° = 180° \Leftrightarrow x = 180° - 80° - 70° = 30°$

Resposta: A

13)



I) **No triângulo ABC, temos:**

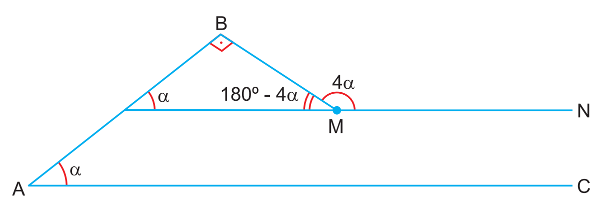
$40° + 2y + 2z = 180° \Leftrightarrow 2(y + z) = 140° \Leftrightarrow y + z = 70°$

II) **No triângulo BCI, temos:**

$x + y + z = 180° \Rightarrow x + 70° = 180° \Leftrightarrow x = 110°$

Resposta: C

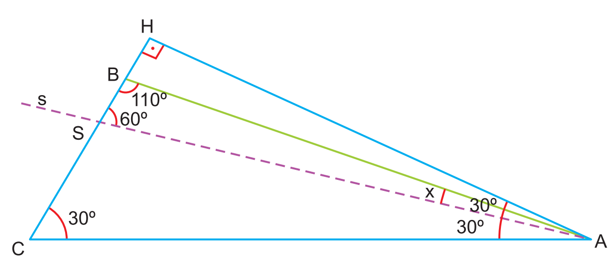
14)



$\alpha + 90° = 4\alpha \Leftrightarrow 90° = 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = 30°$

Resposta: B

15)



I) **No triângulo AHC, temos:** $\hat{A} = 180° - 90° - 30° = 60°$

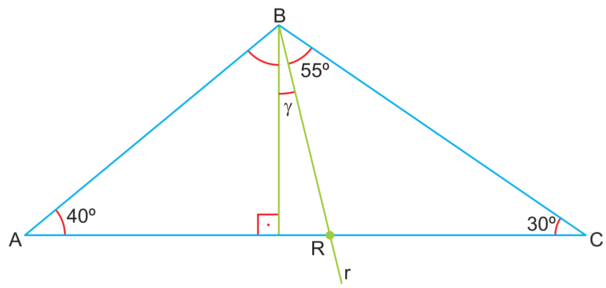
II) **No triângulo AHS, temos:** $H\hat{S}A = 180° - 30° - 90° = 60°$

III) **No triângulo BAS, temos:**

$110° + 60° + x = 180° \Leftrightarrow x = 180° - 110° - 60° = 10°$

Resposta: D

16)



I) $\hat{B} = 180° - 30° - 40° = 110°$

II) r é a bissetriz de $\hat{B}$, então $C\hat{B}R = 55°$

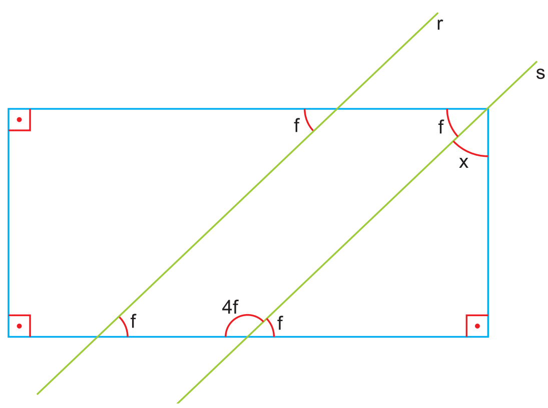
III) $B\hat{R}A = 55° + 30° = 85°$

Então, $\gamma + 90° + 85° = 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \gamma = 180° - 90° - 85° \Rightarrow \gamma = 5°$

Resposta: B

17)

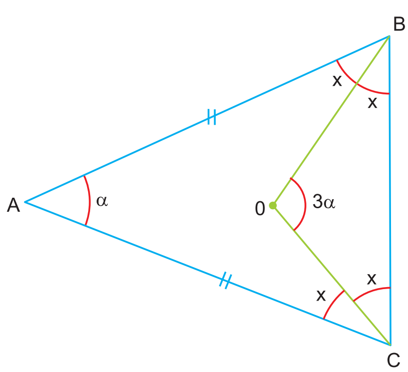


I) $4f + f = 180° \Leftrightarrow 5f = 180° \Leftrightarrow f = 36°$

II) $f + x = 90° \Leftrightarrow x = 90° - f = 90° - 36° = 54°$

Resposta: C

18)



I) No triângulo ABC, temos:

$\alpha + 2x + 2x = 180° \Leftrightarrow \alpha + 4x = 180°$

II) No triângulo BOC, temos:

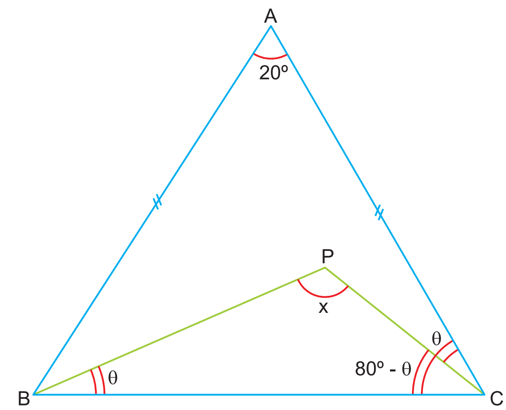
$3\alpha + x + x = 180° \Leftrightarrow 3\alpha + 2x = 180°$

III) $\begin{cases} \alpha + 4x = 180° \\ 3\alpha + 2x = 180° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha - 4x = -180° \\ 6\alpha + 4x = 360° \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\alpha = 180° \Leftrightarrow \alpha = 36°$

Resposta: D

19)



Se $\hat{A} = 20°$, então, no triângulo ABC, $\hat{B} = \dfrac{180° - 20°}{2} \Rightarrow$

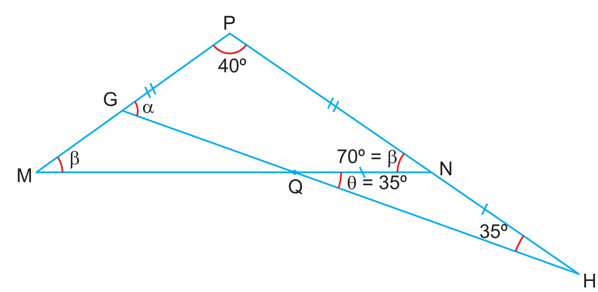
$\Rightarrow \hat{B} = 80°$ e $\hat{C} = 80°$

No triângulo BCP, tem-se: $\theta + x + 80° - \theta = 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 180° - 80° = 100°$

Resposta: B

20)



Como NQ = NH então, $\theta = N\hat{Q}H = N\hat{H}Q = 35°$

Pelo Teorema do ângulo externo, no triângulo NQH, $\beta = 35° + 35° = 70°$

Como o triângulo MPN é isósceles, então

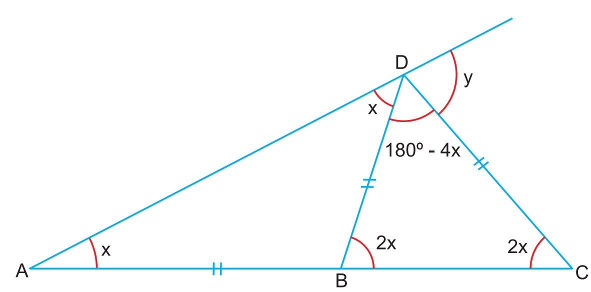
$\hat{P} = 180° - 70° - 70° = 40°$

No triângulo PGH, $40° + \alpha + 35° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 105°$

Logo, $\alpha + \beta + \theta = 105° + 70° + 35° = 210°$

Resposta: D

21)



I) No triângulo ABD, AB = BD, então $B\hat{D}A = B\hat{A}D = x$

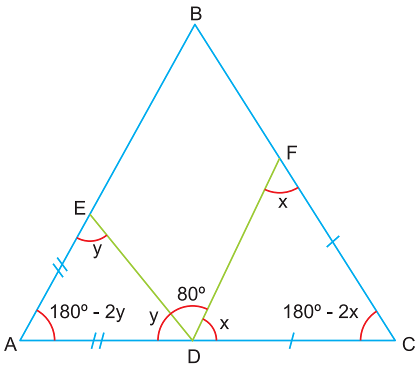
II) $C\hat{B}D$ é ângulo externo do triângulo ABD, assim, $C\hat{B}D = x + x = 2x$

III) No triângulo BCD, BD = CD, então $D\hat{C}B = C\hat{B}D = 2x$

IV) y é ângulo externo do triângulo ACD, assim, $y = x + 2x = 3x$

Resposta: A

22)



I) No triângulo ABC, BA = BC, então $\hat{A} = \hat{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow 180° - 2y = 180° - 2x \Leftrightarrow x = y$

II) No ponto D, $x + y + 80° = 180° \Rightarrow x = y = 50°$

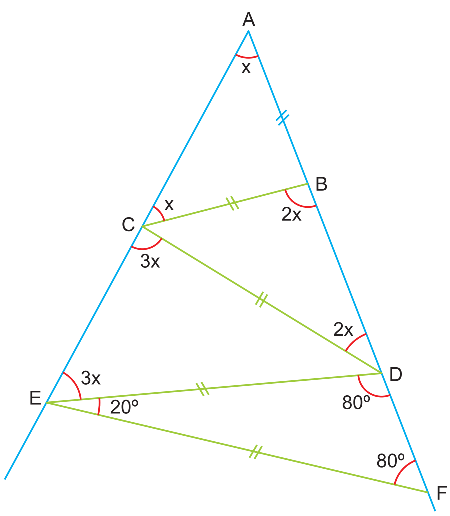
III) $\hat{A} = \hat{C} = 180° - 2 \,.\, 50° = 180° - 100° = 80°$

IV) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow 80° + \hat{B} + 80° = 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \hat{B} = 20$, portanto, $A\hat{B}C = 20°$

Resposta: A

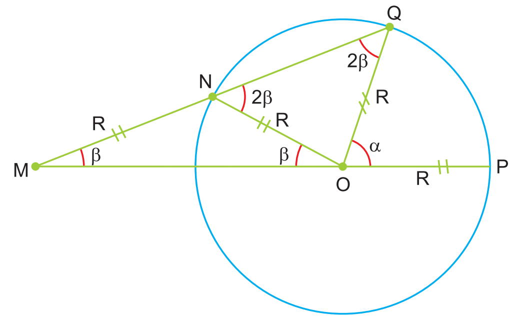
23)



$x + 3x = 80° \Leftrightarrow 4x = 80° \Leftrightarrow x = 20°$, portanto, $C\hat{A}B = 20°$

Resposta: 20°

24)



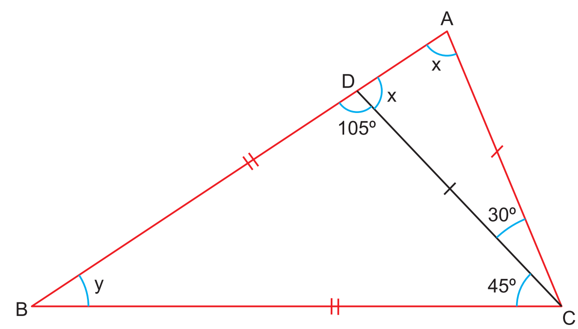
Seja R, o raio da circunferência.

Se MN = OP e OP = R, então MN = R

Logo, $\alpha = \beta + 2\beta \Leftrightarrow \alpha = 3\beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} = 3$

Resposta: C

25)



I) Como o triângulo ADC é isósceles, então:

$\hat{A} = x = \dfrac{180° - 30°}{2} \Leftrightarrow x = 75°$

II) Se $A\hat{D}C = 75°$, então, $B\hat{D}C = 105°$

III) Como AB = BC, então $\hat{A} = \hat{C} = 75°$, logo, $B\hat{C}D = 75° - 30° = 45°$

IV) No triângulo BCD, $y + 105° + 45° = 180° \Leftrightarrow y = 30°$

Então, $x + y = 75° + 30° = 105°$

Resposta: E